ACA
0112

Bound 1939

HARVARD UNIVERSITY

LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY

Exchange

182

SEP 28 1927

182

MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

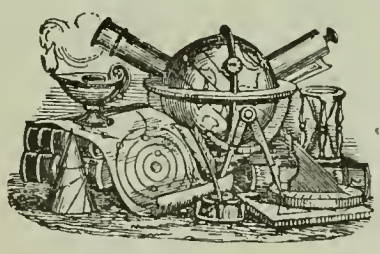
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XVIII.—Parte I.

F. GOMES TEIXEIRA.—Sobre o Desenvolvimento das Funcções em Série.



MADRID
IMPRENTA DE DON LUIS AGUADO
Calle de Pontejos, 8.
—
1897

SEP 28 1927

MEMORIAS

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS

FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

Tomo XVIII.

SOBRE

O

DESENVOLVIMENTO DAS FUNCÇÕES

EM SÉRIE

POR

F. GOMES TEIXEIRA

PROFESSOR NA ACADEMIA POLYTECHNICA DO PORTO,
ANTIGO PROFESSOR NA UNIVERSIDADE DE COIMBRA, SOCIO CORRESPONDENTE
DA ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS DE MADRID, ETC.

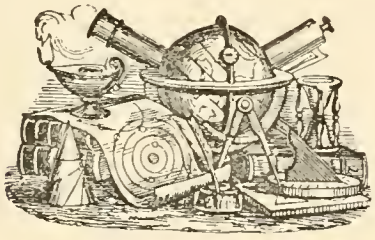
MEMORIA PREMIADA, FUERA DE CONCURSO,

y publicada por la

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS,

FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID

(Tomo XVIII. — Parte I.)



MADRID
IMPRENTA DE D. LUIS AGUADO
Calle de Pontejos, 8.
1897

INTRODUCÇÃO

Versa esta Memoria sobre o assumpto do thema seguinte, proposto pela Academia Real das Scieneias de Madrid:

«*Exposición razonada y metódica de los desarrollos en serie de las funciones matemáticas. Teoría general de los mismos. Significación de las llamadas series divergentes. Investigación de una serie típica, de la cual, á ser posible, se deriven como casos particulares las series de mayor importancia y uso en análisis, como las de Taylor, Lagrange y cualquiera otra análoga.*»

O desenvolvimento das funeções em série tem sido empregado pelos geometras umas vezes com o fim de calcular os valores numericos que tomam estas funeções para valores determinados das variaveis, outras vezes para estudar as propriedades das mesmas funeções. Quer se empreguem para um, quer para outro fim, é conveniente variar quanto possivel a fórma d'estes desenvolvimentos, já para obter séries mais rapidamente convergentes, quando se destinam ao primeiro fim, já porque ha propriedades que se manifestam nos desenvolvimentos de uma fórma e fieam ocultas nos desenvolvimentos de outra fórma.

O problema geral do desenvolvimento das funeções em série consiste em procurar, dadas as funeções $f(x)$, $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$,..., as condições para que seja

$$f(x) = A_1\theta_1(x) + A_2\theta_2(x) + \ldots + A_n\theta_n(x) + \ldots,$$

A_1, A_2... representando quantidades constantes, e determinar estas constantes. Na impossibilidade de resolver este problema com toda a generalidade, têem os geometras considerado os casos particulares que, ou por sua simplicidade ou por sua importancia nas applicações da Analyse á Geometria, á Mecanica e á Physica, têem merecido preferencia. Assim foi considerado o caso de $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$,... representarem potencias inteiras de uma funcção, o caso de estas funcções serem os senos ou os cosenos de multiplos successivos do arco x, o caso de estas funcções representarem potencias inteiras, positivas ou negativas, de muitos binomios da fórma $x-a$, $x-b$..., etc. Cada uma d'estas questões exige bastante espaço para ser tratada de uma maneira completa; porisso aqui limitar-nos-hemos a tratar da primeira, isto é, do desenvolvimento das funcções em série ordenada segundo as potencias inteiras de uma funcção dada.

Principiando pelo caso mais simples, consideraremos primeiramente os desenvolvimentos ordenados segundo as potencias inteiras e positivas de uma variavel independente, tanto no caso d'esta variavel ser real como no caso de ser imaginaria, expondo os differentes methodos empregados pelos geometras para resolver esta questão. Assim estudaremos primeiramente o methodo, appresentado por J. Bernoulli e Taylor e completado por Lagrange e Cauchy, para o desenvolvimento das funcções de variaveis reaes; depois a extensão d'este methodo, esboçada por Cauchy e completada por Darboux, ao caso das funcções de variaveis imaginarias. Em seguida, continuando o estudo de desenvolvimento das funcções das variaveis imaginarias e considerando a questão n'um ponto de vista menos elementar, exporemos o methodo de Cauchy, fundado na theoria dos integraes curvilineos, o methodo de Riemann, fundado na theoria das funcções harmonicas, e finalmente o methodo de Weierstrass, fundado na theoria das series inteiras. Cada um d'estes methodos é o objecto principal de um dos primeiros cinco capitulos.

O desenvolvimento das funcções em série ordenada segundo as potencias inteiras, positivas e negativas, é tambem considerado. A formula dada,

para achar estes desenvolvimentos, por Laurent é demonstrada no capitulo terceiro pelo methodo de Cauchy e no capitulo quinto pelo methodo de Weierstrass e Mittag-Leffler. A bella demonstração que Mittag-Leffler deu d'esta formula nas *Acta Mathematica*, foi apresentada pelo eminente geometra de uma maneira bastante resumida; aqui apresentamol-a com todos os desenvolvimentos necessarios para ser facilmente comprehendida, modificando mesmo algumas passagens com o fim de a tornar mais elementar.

No capitulo sexto demonstraremos a formula de Burmann, que dá o desenvolvimento das funcções em série ordenada segundo as potencias inteiras e positivas de uma funcção dada, e d'ella tiraremos a de Lagrange, que só differe d'aquella na notação. Em seguida faremos, nos num. 61 e 62, uma applicação, que julgamos nova, da mesma formula ao desenvolvimento das funcções em série ordenada segundo as potencias de sen x e á demonstração de duas formulas devidas a Euler. Finalmente, para responder á ultima parte do programma proposto, daremos uma formula, que dá o desenvolvimento das funcções em série ordenada segundo as potencias inteiras, positivas e negativas, de uma funcção dada. Esta formula, que julgamos nova e que estudamos nos num. 64 e 65, comprehende a de Burmann, e por tanto a de Taylor e Lagrange, e ainda a de Laurent.

Terminando estas considerações preleminares, devemos dizer que, na exposição dos assumptos, supposemos sómente conhecidas do leitôr a theoria algebrica das quantidades complexas, os principios geraes mais elementares da theoria das séries e os primeiros principios do Calculo differencial e do Calculo integral. Porisso, antes de entrar em cada questão, apresentámos alguns estudos preleminares que certamente serão conhecidos por muitos dos leitores. Devemos ainda dizer que fizemos acompanhar cada assumpto pelas indicações bibliographicas e historicas que nos pareceram convenientes.

CAPITULO PRIMEIRO

ESTUDO DA SÉRIE DE TAYLOR NO CASO DAS FUNCÇÕES DE VARIAVEIS REAES

1. As séries de forma mais simples que se podem empregar, para desenvolvêr as funcções, são as séries da forma

$$A_0 + A_1 (x - a) + \ldots + A_n (x - a)^n + \ldots, \tag{1}$$

onde a, A_0, A_1 ... representam quantidades constantes e x uma quantidade variavel. Consideremos, pois, em primeiro logar estas séries, determinando as condições para que qualquer funcção dada $f(x)$ seja susceptivel de um tal desenvolvimento e procurando os meios para calcular os coefficientes A_0, A_1 ... Supporemos em primeiro logar que a funcção $f(x)$ é real, assim como as quantidades x e a.

2. Gregory, nas suas *Exercitationes geometricae*, publicadas em 1668, e Mercator, na sua *Logarithmotechnia*, publicada no mesmo anno, apresentaram os primeiros desenvolvimentos de funcções em série ordenada segundo as potencias da variavel, dando o primeiro o desenvolvimento de arctang x, e o segundo o desenvolvimento de $\log(1 + x)$. Alguns annos depois Newton apresentou, nas suas cartas a Leibnitz de 13 e 24 de Outubro de 1676, os desenvolvimentos em série do binomio, do seno, do coseno e da exponencial.

O primeiro geometra que deu, porém, uma formula assaz geral para o desenvolvimento das funcções em série, foi João Bernoulli, que publicou em 1694, nas *Acta eruditorum*, um artigo em que apresentou a formula seguinte (Veja-se *Opera omnia*, t. I, p. 125):

$$\int F(x)\,dx = xF(x) - \frac{1}{2}x^2F'(x) + \frac{1}{2.3}x^3F''(x) - \ldots,$$

de que fez algumas applicações a funcções particulares, a qual elle tirou da identidade evidente

$$F(x)\,dx = \left(F(x) + xF'(x)\right)dx - \frac{1}{2}\left(2xF'(x) + x^2F''(x)\right)dx$$

$$+ \frac{1}{2.3}\left(3x^2F''(x) + x^3F'''(x)\right)dx - \ldots$$

$$\pm\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\left((n-1)x^{n-2}F^{(n-2)}(x) + x^{n-1}F^{(n-1)}(x)\right)dx$$

$$\mp\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(x)\,dx,$$

integrando ambos os membros, pondo $n = \infty$, e determinando a constante arbitraria, introduzida pela integração, pela condição de ser nullo o integral $\int F(x)\,dx$, quando $x = 0$.

Analysando esta demonstração, vê-se que a conclusão tirada pelo celebre geometra é demasiadamente lata, e que o que se pode affirmar é que este desenvolvimento tem logar todas as vezes que a quantidade

$$\frac{(-1)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\int x^{n-1}F^{n-1}(x)\,dx$$

tende para zero, quando n tende para o infinito. Assim modificada, é esta demonstração ainda hoje empregada.

3. A série de Bernoulli, que vimos de considerar, não está ordenada segundo as potencias da variavel. O primeiro geometra que apresentou uma formula, que dá immediatamente o desenvolvimento das funcções em

série ordenada segundo as potencias da variavel, foi Taylor, que, no seu *Methodus incrementorum*, publicado em 1715, deu para este fim a formula

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^n(x) + \ldots,$$

sem todavia fazer conhecer as condições para que este desenvolvimento seja convergente.

O methodo empregado por Taylor, para chegar a esta formula, é fundado na theoria das differenças finitas. Esboçado pelo seu author na obra citada, foi depois desenvolvidamente exposto por Euler nas suas *Institutiones calculi differentialis*. Eis resumidamente em que consiste este methodo.

Sejam Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$ ... as differenças da funcção $y = f(x)$, correspondentes á differença constante Δx da variavel independente x. Teremos, como se vê por inducção facil de completar,

$$f(x + k\Delta x) = y + k\Delta y + \frac{k(k-1)}{1.2}\Delta^2 y + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\Delta^3 y + \ldots,$$

onde k representa um numero inteiro positivo, e onde o numero de termos que entram no segundo membro é igual a $k+1$; e, pondo $k\,\Delta x = h$,

$$\text{(A)} \qquad f(x+h) = y + h\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{h(h-\Delta x)}{1.2}\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \ldots$$

Fazendo tender Δx para zero, ou k para o infinito, vem a formula pedida

$$f(x+h) = f(x) + h\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}h^2\frac{d^2 y}{dx^2} + \ldots$$

Esta demostração é evidentemente viciosa. Tem, entre outros inconvenientes, o de se fundar em que o limite para que tende uma somma de parcellas é igual á somma dos limites para que tendem as parcellas, theo-

rema que é verdadeiro quando as parcellas são em numero finito, mas que nem sempre tem logar quando, como no caso actual, o numero $k+1$ das parcellas tende para o infinito.

A formula de Taylor não differe essencialmente da formula de Bernoulli, da qual resulta por uma mudança de notação. Mudando, com effeito, na formula de Bernoulli primeiramente $F(x)$ em $f'(h-x)$, e depois x em h e h em $x+h$, vem a formula de Taylor. Porisso J. Bernoulli, depois da publicação da obra de Taylor, reclamou para si a prioridade da descoberta da formula precedente. (*Opera omnia*, t. II, p. 584.)

4. Maclaurin, no seu *Treatise of Fluxions*, publicado em 1742, apresentou outra demonstração da formula de Taylor. Admittindo que toda a funcção que tem derivadas de todas as ordens é susceptivel de ser desenvolvida em serie ordenada segundo as potencias de x:

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$$

determinou os coefficientes A_0, A_1, A_2 ... por meio das igualdades seguintes:

$$\begin{aligned} f'(x) &= A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots, \\ f''(x) &= 2A_2 + 2.3A_3 x + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

que dão

$$A_0 = f(0), \quad A_1 = f'(0), \quad A_2 = \frac{1}{2} f''(0), \ldots$$

Achou assim a formula

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2} x^2 f''(0) + \ldots$$

ainda hoje conhecida pelo nôme de *formula de Maclaurin*.

Da formula de Taylor passa-se para esta pondo primeiramente $x = 0$ e depois mudando h em x. D'esta passa-se para a de Taylor mudando primeiramente $f(x)$ em $f(x+h)$ e depois trocando h por x.

A demonstração que precede tem, entre outros inconvenientes, o de n'ella se suppôr estabelecida anteeipadamente a possibilidade de a funcção ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias inteiras e positivas da variavel.

5. O inconveniente que vimos de notar na demonstração de Maclaurin tem-o tambem a demonstração que Lagrange deu da formula de Taylor n'uma memoria apresentada em 1772 á Academia das Sciencias de Berlin (*Oeuvres*, t. III, p. 441). Parte, com effeito, da igualdade

$$f(x+h) = f(x) + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \ldots,$$

A, B, C, ... representando funcções de x que pretende determinar, e, para isso, muda n'este desenvolvimento x em $x+l$ e h em $h+l$, o que o leva a dois desenvolvimentos, que devem ser identicos, e que dão, pelo methodo dos coefficientes indeterminados, as quantidades B, C, ... Acha d'este módo que, pondo por definição $A = f'(x)$, vem $B = \frac{1}{2} f''(x)$, $C = \frac{1}{2.3} f'''(x)$, etc.

Foi porém este grande geometra o primeiro que reconheceu o papel fundamental da formula de Taylor na Analyse, e o que deu os primeiros passos para o estudo das condições para o desenvolvimento das funcções pela série de Taylor, apresentando na sua *Théorie des fonctions analytiques*, publicada em 1797, a formula seguinte:

$$(1) \qquad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(x) + R_n,$$

onde é

$$(2) \qquad R_n = \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^n(x+\theta h),$$

θ representando uma funcção desconhecida de n, cujo valôr está comprehendido entre 0 e 1. Quando R_n tende para 0, para $n = \infty$, a série de Taylor tem logar; no caso contrario não tem logar.

6. Para demonstrar a formula anterior apresentou Lagrange dous me-

thodos, dos quaes vamos dar uma ideia succinta, empregando, para simplificar a exposição do primeiro, as notações do Calculo integral.

O primeiro methodo foi publicado na *Théorie des fonctions analytiques (Ouvres,* t. IX, p. 69).

Pondo

$$f(x+h) = f(x+h-hz) + hzf'(x+h-hz)$$
$$+ \frac{h^2z^2}{2} f''(x+h-hz) + \ldots + \frac{h^{n-1}z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(x+h-hz) + h^n P,$$

esta igualdade determina uma funcção P de x e z, que é nulla quando $z = 0$.

Derivando os seus dous membros relativamente a z, vem

$$0 = -\frac{h^n z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^n(x+h-hz) + h^n P',$$

o que dá

$$P = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)} \int_0^z z^{n-1} f^n(x+h-hz)\, dz.$$

Pondo agora $z = 1$, obtem-se a formula (1) com a seguinte expressão do resto R_n:

$$R_n = P = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)} \int_0^1 z^{n-1} f^n(x+h-hz)\, dz.$$

Temos assim uma expressão do resto da série de Taylor por meio de um integral definido.

Para d'esta expressão de R_n tirar a formula (2), demonstra Lagrange um theorema que coincide no fundo com um caso particular do theorema hoje conhecido pelo nôme de *primeiro theorema dos valores medios dos integraes definidos*. Applicando-o ao integral que entra na expressão de R_n, suppondo para isso que a funcção $f^n(x+h-hz)$ é *continua* no intervallo de $z = 0$ a $z = 1$, vem

$$\int_0^1 z^{n-1} f^n(x+h-hz)\, dz = \frac{1}{n} f^n(x+h-\theta h),$$

θ' representando uma quantidade comprehendida entre 0 e 1. Pondo agora $1 - \theta' = \theta$, temos finalmente

$$R_n = \frac{h^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^n (x + \theta h),$$

se a funcção $f^n (x)$ fôr *continua* no intervallo $(x, x + h)$.

7. A segunda demonstração dada por Lagrange das formulas (1) e (2) foi publicada nas suas *Leçons sur le calcul des fonctions (Oeuvres*, t. x, p. 85). Esta demonstração, mais simples e directa do que a anterior, é fundada no theorema de Calculo differencial, segundo o qual as funcções crescem com as variaveis, quando as suas derivadas de primeira ordem são positivas, e decrescem, quando estas derivadas são negativas.

Consideremos a série de expressões

$$f^n (x + h') - L,$$
$$f^{n-1} (x + h') - f^{n-1} (x) - Lh',$$
$$f^{n-2} (x + h') - f^{n-2} (x) - f^{n-1} (x) h' - L \frac{h'^2}{1 \cdot 2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(x+h') - f(x) - f'(x)h' - \ldots - f^{n-1}(x) \frac{h'^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} - L \frac{h'^n}{1.2\ldots n}.$$

Todas estas expressões são nullas quando é $h' = 0$, exceptuando a primeira, e cada uma d'ellas é a derivada da seguinte relativamente a h'; applicando, pois, o theorema que vimos de recordar, vê-se que, se a primeira tiver um signal constante quando h' varia desde 0 até h, todas as outras têm este mesmo signal quando h é positivo, e o signal contrario quando h é negativo. Representando, pois, por M e N o maior e o menor dos valores que toma $f(x + h')$ quando h' varia desde 0 até h, e dando á L os valores M e N, temos as desigualdades

$$f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \ldots - \frac{h^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} f^{n-1}(x) < \frac{Mh^n}{1 \cdot 2 \ldots n},$$
$$f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \ldots - \frac{h^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} f^{n-1}(x) > \frac{Nh^n}{1 \cdot 2 \ldots n},$$

quando h é positivo, e as desigualdades contrarias, quando h é negativo.

Em ambos os casos, tira-se d'estas desigualdades a igualdade seguinte:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} f^{n-1}(x) + \frac{Kh^n}{1 \cdot 2 \ldots n},$$

K representando uma quantidade nem superior a M, nem inferior a N.

Suppondo agora que a funcção $f^n(x)$ é continua no intervallo de x a $x+h$, deve existir um numero x_1, comprehendido entre x e $x+h$, tal que esta funcção toma o valor K qnando $x = x_1$ (1). Como a este numero se póde dar a fórma $x+\theta h$, θ representando uma quantidade comprehendida entre 0 e 1, temos

$$K = f^n(x+\theta h).$$

Substituindo este valor de K na formula anterior, vêem as formulas (1) e (2).

8. Cauchy, no tomo I, pagina 29, dos seus *Exercices de Mathématiques*, publicados em 1826 (*Oeuvres*, t. VI da 2.ª série), deu uma nova demonstração das formulas (1) e (2), e partindo de um caso particular d'estas formulas, apresentou em seguida uma nova expressão do resto R_n, mais propria para o estudo do desenvolvimento em série de algumas funcções.

Applicando, com effeito, á funcção de z

$$\varphi(z) = f(x+h) - f(z) - (x+h-z) f'(z)$$
$$- \frac{1}{2}(x+h-z)^2 f''(z) - \ldots - \frac{(x+h-z)^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} f^{n-1}(z)$$

a formula

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x+\theta h),$$

---

(1) Este principio, considerado por Lagrange como evidente, foi mais tarde demonstrado por Cauchy no seu *Cours d'Analyse*.

que resulta das formulas (1) e (2) pondo n' ellas $n = 1$, e attendendo á igualdade

$$\varphi'(z) = -\frac{(x+h-z)^{n-1}}{1.2...(n-1)} f^n(z),$$

obtem a formula de Taylor

$$(1) \qquad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + ... + \frac{h^{n-1}}{1.2...(n-1)} f^{n-1}(x) + R_n,$$

com a expressão do resto

$$(2') \qquad R_n = \frac{h^n (1-\theta)^{n-1}}{1.2...(n-1)} f^n(x+\theta h).$$

9. A expressão do resto, que vimos de achar, foi objecto de uma observação interessante de Pringsheim *(Mathematische Annalen*, t. 44). Mostrou, com effeito, este geometra que, apesar de θ ser funcção de n, é condição *necessaria* para que a série que resulta de (1) pondo $n = \infty$ convirja para a funcção $f(x)$, que esta expressão de R_n, *considerada como funcção de duas variaveis independentes* θ e n, tenda para 0, quando n tende para o infinito e θ varia entre 0 e 1. Conclue-se d'aqui que o conhecimento da funcção θ nada adiantaria a resolução do problema que tem por fim desenvolver $f(x)$ em série. A demonstração d'este theorema, que não será dada aqui, pode vêr-se no trabalho de Pringsheim já citado e n'uma nota de E. Pascal, publicada na *Rivista di Matematica* (Roma, 1895).

10. As expressões do resto da série de Taylor devidas á Lagrange e Cauchy são casos particulares de uma expressão muito geral, dada por Schlömilch primeiramente no seu *Handbuch der Differentialrechnung*, publicado em 1847-1848, e em seguida n'um artigo publicado no *Journal de Liouville* (2.ª série, t. III), que obteve por meio da igualdade, devida á Cauchy,

$$(3) \qquad \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{\psi(x+h) - \psi(x)} = \frac{\varphi'(x+\theta h)}{\psi'(x+\theta h)}, \quad (o < \theta < 1)$$

$\psi'(x)$ representando uma funcção que não seja nulla no intervallo de x a $x+h$.

Applicando, com effeito, esta igualdade á funcção considerada no n.º 8

$$\varphi(z) = f(x+h) - f(z) - (x+h-z) f'(z)$$
$$- \frac{1}{2}(x+h-z)^2 f''(z) - \ldots - \frac{(x+h-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(z),$$

vem o resultado

$$(1) \quad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(x) + R_n,$$

$$(2'') \qquad R_n = \frac{h^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} \cdot \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{\psi'(x+\theta h)} f^n(x+\theta h).$$

Pondo

$$\psi(z) = (x+h-z)^p,$$

vem para R_n a expressão

$$(2''') \qquad R_n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{1.2\ldots(n-1)\,p} f^n(x+\theta h),$$

a qual, sem ter tido outros usos que não tenham as formulas de Lagrange e Cauchy, tem todavia a vantagem de as contêr a ambas, correspondendo uma a $p = n$ e a outra a $p = 1$.

A formula (2''') foi tambem obtida por Roche, partindo da expressão de R_n por meio de um integral definido, anteriormente achada (n.º 6), *(Journal de Liouville*, 2.ª série, t. III).

11. Nas demonstrações das formulas (1) e (2), dadas por Lagrange, suppoz-se que a funcção $f^n(x)$ é *continua* no intervallo de x a $x+h$. A mesma hypothese se é obrigado a fazer na demonstração das formulas (1) e (2'''), dada no n.º anterior, quando se adopta, para estabelecer a igualdade (3), a demonstração que deu Cauchy d'esta formula, pois que n'ella o illustre geometra suppõe que $\varphi'(z)$ e $\psi'(z)$ são funcções *continuas* de z no intervallo de x a $x+h$. O. Bonnet porém, dando uma nova demonstração da igualdade (3), que só exige que as funcções $\varphi'(z)$ e $\psi'(z)$ sejam *finitas e determinadas* no intervallo considerado, permittiu que se estendessem as formulas (1) e (2''') ao caso de $f^n(z)$ ser discontinua, se toda-

via fôr *finita e determinada* no intervallo $(x, x+h)$. Seja $F(z)$ uma funcção que admitte uma derivada $F'(z)$ finita e determinada, no intervallo de $z=a$ a $z=a+h$, e que é nulla nos extremos d'este intervallo. Quando z varia desde a até $a+h$, a funcção $F(z)$ deve principiar por crescer (em valôr absoluto), para depois decrescer; porisso e por ser continua, deve, no intervallo considerado, passar por um maximo ou por um minimo negativo (¹). Deve, pois, existir um numero x_1 tal que seja $F'(z)=0$, quando $z=x_1$, e a este numero, que deve estar comprehendido entre x e $x+h$, póde dar-se a fórma $x_1=x+\theta h$ (onde $0<\theta<1$).

O theorema que vimos de demonstrar é conhecido pelo nôme de *theorema de Rolle*, por ter sido dado por este geometra para o caso particular das funcções inteiras. Para tirar d'elle a formula (3) basta pôr

$$F(z)=\varphi(x)-\varphi(z)-[\psi(x)-\psi(z)]\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{\psi(x+h)-\psi(x)}.$$

A funcção $F(z)$ é nulla nos pontos $z=x$ e $z=x+h$; logo temos a igualdade

$$F'(x_1)=-\varphi'(x_1)+\psi'(x_1)\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{\psi(x+h)-\psi(x)}=0,$$

da qual se tira a formula (3), quando $\psi'(z)$ é differente de 0 no intervallo $z=x$ a $z=x+h$.

12. Viu-se nos dous numeros anteriores que a formula de Taylor, com a expressão do resto dada por Schlömilch, pode ser deduzida do theorema de Rolle por intermedio da formula (3). Hommessham Cox, n'um artigo publicado no t. VI do *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, tirou-a directamente d'este theorema, applicando-o á funcção

$$F(z)=-f(x+h)+f(z)+(x+h-z)f'(z)$$
$$+\frac{1}{2}(x+h-z)^2f''(z)+\ldots+\frac{(x+h-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}(z)$$
$$+\frac{(x+h-z)^p}{h^p}\left[f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\ldots-\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}(x)\right]$$

(¹) A existencia d'este maximo ou minimo negativo, que O. Bonnet considerava evidente, foi rigorosamente demonstrada por Weierstrass. (Veja-se, por exemplo, o t. I do nosso *Curso de Analyse*).

que é nulla quando $z = x$ e quando $z = x + h$. Temos, com effeito, a equação

$$0 = F'(x_1) = \frac{(x+h-x_1)^{n-1}}{1\,.\,2\,\ldots\,(n-1)} f^n(x_1)$$
$$- \frac{p\,(x+h-x_1)^{p-1}}{h^p}\left[f(x+h) - f(x) - \ldots - \frac{h^{n-1}}{1\,.\,2\ldots(n-1}\, f^{n-1}(x)\right]$$

da qual se tira, pondo $x_1 = x + \theta h$, as formulas (1) e (2''').

E'conveniente observar que a expressão de $F(z)$, de que se partiu, é a que resulta de snbstituir na expressão de $F(z)$, dada no numero anterior, $\varphi(z)$ pela expressão dada no num.° 10 e $\psi(z)$ por $(x+h-z)^p$. Logo o methodo que vimos de expôr coincide no fundo com o methodo dado nos numeros 10 e 11.

13. Fundados nos mesmos principios podemos dar uma formula muito geral, que contem a formula de Taylor (1).

Para isso appliquemos a igualdade

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\,\varphi'(x+\theta h)$$

á funcção

$$\varphi(z) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^l}{1\,.\,2\,\ldots\,l} f^l(x)$$
$$- f(z) - (x+h-z)\,f'(z) - \ldots - \frac{(x+h-z)^{n-1}}{1\,.\,2\,\ldots\,(n-1)} f^{n-1}(z)$$
$$- \left[F(x) + h\,F'(x) + \ldots + \frac{h^k}{1\,.\,2\,\ldots\,k} F^k(x)\right.$$
$$\left. - F(z) - (x+h-z)F'(z) - \ldots - \frac{(x+h-z)^{m-1}}{1\,.\,2\,\ldots\,(m-1)} F^{m-1}(z)\right]$$
$$\times \frac{f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \ldots - \dfrac{h^l}{1\,.\,2\,\ldots\,l} f^l(x)}{F(x+h) - F(x) - h\,F'(x) - \ldots - \dfrac{h^k}{1\,.\,2\,\ldots\,k} F^k(x)}.$$

---

(1) G. Teixeira: *Sur une formule d'Analyse. (Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3.ª série, t. v.)

Teremos, suppondo $n \geqq l+1$ e $m \geqq k+1$ e effectuando alguns calculos simples, a igualdade

$$\frac{f(x+h)-f(x)-hf'(x)-\ldots-\frac{h^l}{1\,.\,2\,\ldots\,l}f^l(x)}{F(x+h)-F(x)-hF'(x)-\ldots-\frac{h^k}{1\,.\,2\,\ldots\,k}F^k(x)}$$

$$=\frac{\frac{h^{l+1}}{1\,.\,2\,\ldots\,(l+1)}f^{l+1}(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{1\,.\,2\,\ldots\,(n-1)}f^{n-1}(x)+R_n}{\frac{h^{k+1}}{1\,.\,2\,\ldots\,(k+1)}F^{k+1}(x)+\ldots+\frac{h^{m-1}}{1\,.\,2\,\ldots\,(m-1)}F^{m-1}(x)+R'_m},$$

onde

$$R_n=\frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{1\,.\,2\,\ldots\,(n-1)}f^n(x+\theta h),$$

$$R'_n=\frac{h^m(1-\theta)^{m-1}}{1\,.\,2\,\ldots\,(m-1)}F^m(x+\theta h),$$

se o segundo membro d'esta igualdade se conserva differente do zero quando θ varia entre 0 e 1.

Pondo n'esta formula

$$F(x)=h^m,\quad k=m-1,\quad l=n-1,$$

$$F^m(x)=1\,.\,2\,\ldots\,m,\quad F^m(x+\theta h)=1\,.\,2\,\ldots\,m,$$

obtem-se a formula de Taylor com uma expressão do resto que coincide com a que resulta da formula de Schlömilch (2''') dando a p um valor inteiro positivo qualquer.

14. Se a funcção $f^n(x)$ fôr continua no ponto x, temos

$$f^n(x+\theta h)=f^n(x)+\varepsilon,$$

ε representando uma quantidade que tende para 0 quando h tende para 0. Podemos porisso, substituindo este valor de $f^n(x+\theta h)$ na expressão

do resto dada por Lagrange, escrever a formula de Taylor do módo seguinte:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^n(x) + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \ldots n} \varepsilon.$$

Esta formula tem mesmo logar, como mostrou Peano, n'um artigo publicado no t. IX do *Mathesis*, quando $f^n(x)$ não é continua no ponto x, se todavia é n'este ponto finita e determinada. Esta extensão da formula anterior póde ser tirada muito simplesmente da formula demonstrada no numero 13, como vamos vêr.

Mudemos para isso na referida formula m e n em $n-1$, e ponha-se depois $x=0$, $l=n-2$, $k=n-2$. Teremos

$$\frac{f(h) - f(0) - hf'(0) - \ldots - \dfrac{h^{n-2}}{1 \cdot 2 \ldots (n-2)} f^{n-2}(0)}{F(h) - F(0) - hF'(0) - \ldots - \dfrac{h^{n-2}}{1 \cdot 2 \ldots (n-2)} F^{n-2}(0)} = \frac{f^{n-1}(\theta h)}{F^{n-1}(\theta h)}.$$

Appliquemos agora esta igualdade ás funcções

$$f(h) = \varphi(x+h) - \varphi(x) - h\varphi'(x) - \ldots - \frac{h^n}{1 \cdot 2 \ldots n} \varphi^n(x),$$

$$F(h) = \frac{h^n}{1 \cdot 2 \ldots n}.$$

Como é

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad \ldots, \quad f^{n-2}(0) = 0,$$

$$f^{n-1}(h) = \varphi^{n-1}(x+h) - \varphi^{n-1}(x) - h\varphi^n(x),$$

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 0, \quad \ldots, \quad F^{n-2}(0) = 0, \quad F^{n-1}(h) = h,$$

vem

$$f(h) = \frac{h^n}{1 \cdot 2 \ldots n} \left[\frac{\varphi^{n-1}(x+\theta h) - \varphi^{n-1}(x)}{\theta h} - \varphi^n(x) \right].$$

Mas, em virtude da definição de derivada, temos

$$\frac{\varphi^{n-1}(x+\theta h)-\varphi^{n-1}(x)}{\theta h}=\varphi^{n}(x)+\varepsilon,$$

onde ε representa uma quantidade infinitamente pequena com h.

Logo temos a igualdade

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)-h\varphi'(x)-\ldots-\frac{h^{n}}{1\,.\,2\,\ldots\,n}\varphi^{n}(x)=\frac{h^{n}\varepsilon}{1\,.\,2\,\ldots\,n}$$

da qual se tira a formula pedida mudando φ em f.

15. Temos até aqui considerado o desenvolvimento de $f(x+h)$ segundo as potencias de h. Para achar agora o desenvolvimento de $f(x)$ segundo as potencias de $x-a$, basta desenvolver $f(a+h)$ segundo as potencias de h e substituir depois h por $x-a$. D'este módo tiram-se das formulas (1) e (2''') as seguintes:

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{1\,.\,2\,\ldots\,(n-1)}f^{n-1}(a)+R_{n},$$

$$R_{n}=\frac{(x-a)^{n}(1-\theta)^{n-p}}{1\,.\,2\,\ldots\,(n-1)\,p}f^{n}\left[a+\theta(x-a)\right],$$

das quaes se tira o desenvolvimento de $f(x)$ em série ordenada segundo as potencias de $x-a$, quando, n tendendo para ∞, R_{n} tende para 0.

16. Terminaremos o que temos a dizer sobre a série de Taylor, no caso das variaveis reaes, expondo uma observação importante, devida á Cauchy. Fez notar este grande geometra, nas suas *Leçons de Calcul différentiel*, que, sendo uma funcção desenvolvida pela série de Taylor, pode obter-se um resultado convergente e todavia este desenvolvimento não representar a funcção que lhe deu origem. Para dar um exemplo d'este facto apresenta a funcção $e^{-x^{2}}+e^{-\frac{1}{x^{2}}}$ que, sendo desenvolvida em série, dá o resultado.

$$1-x^{2}+\frac{x^{4}}{1\,.\,2}-\frac{x^{6}}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots$$

que tende para e^{-x^2} e não para $e^{-x^2}+e^{-\frac{1}{x^2}}$. Só quando o resto de uma série, obtida pela formula de Taylor, tender para 0 quando n tende para ∞, é que podemos affirmar que a série tem para somma a funcção. Esta circumstancia mostra claramente a necessidade que ha de considerar o resto no desenvolvimento das funcções em série.

Os geometras que primeiro empregaram a série de Taylor não faziam esta discussão do resto, nem mesmo attendiam, na maior parte das vezes, á questão da convergencia das séries que empregavam. Muitos resultados verdadeiros foram mesmo obtidos pela série de Taylor em circumstancias em que esta série era divergente. Analysando porém o methodo empregado para os deduzir, vê-se que o emprego que faziam da série de Taylor equivalia ao emprego da formula

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\ldots+\frac{h^n}{1\,.\,2\,\ldots\,n}f^n(x)+\frac{h^n}{1\,.\,2\,\ldots\,n}\varepsilon$$

em questões em que não era necessario conhecer ε.

17. Por meio da formula de Taylor, com as expressões do resto dadas por Lagrange e Cauchy, tem-se achado o desenvolvimento em série de algumas funcções importantes. A difficuldade que se encontra porém geralmente em verificar se o resto R_n tende ou não para 0, quando n tende para o infinito, limitaria consideravelmente o uso da série de Taylor, se Cauchy, fundando-se em methodos de natureza mais elevada, não tivesse dado o meio de evitar esta discussão, tirando a possibilidade do desenvolvimento da consideração immediata da funcção. Vamos deduzir o theorema célebre que Cauchy deu para este fim, empregando para isso primeiramente o methodo por elle seguido, depois o methodo proposto por Riemann, e finalmente o methodo empregado por Weierstrass. Porém, antes d'isso, vamos, conservando-nos ainda no ponto de vista elementar, estender ao caso das funcções de variaveis complexas o theorema de Taylor e as expressões do resto obtidas n'este capitulo.

CAPITULO II

ESTUDO DA FORMULA DE TAYLOR NO CASO DAS FUNCÇÕES DE VARIAVEIS COMPLEXAS. METHODO ELEMENTAR

18. A extensão da formula de Taylor ao caso das funcções de variaveis complexas foi feita pela primeira vez por Cauchy, já por um processo elementar, que aqui vamos expôr, já por um processo de natureza superior, que será exposto no capitulo seguinte. O processo elementar, a que vimos de nos referir, foi publicado pelo célebre geometra nas suas *Leçons de Calcul differentiel*, publicadas em 1829.

Seja

$$F(x) = F(\rho e^{i\omega}) = \varphi(\rho) + i\psi(\rho)$$

uma funcção da variavel complexa

$$x = \rho(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\,\omega) = \rho e^{i\omega},$$

e supponhamos que x, quando varia, percorre uma recta que passa pela origem das coordenadas e faz um angulo ω com o eixo das abscissas, e que $F(x)$ admitte as derivadas $F'(x), \ldots, F^n(x)$ finitas e determinadas. Teremos, derivando $F(x)$ n vezes relativamente a ρ,

$$e^{ni\omega} F^n(x) = \varphi^n(\rho) + i\psi^n(\rho).$$

Supponhamos agora que as derivadas de $\varphi(\rho)$ e $\psi(\rho)$ até á ordem $n-1$ são nullas quando $\rho=0$. As formulas (1) e (2''') no n.º 10 mostram que é, n'este caso

$$\varphi(\rho)=\frac{\rho^n(1-\theta_1)^{n-p}}{1\,.\,2\,\ldots\,(n-1)\,p}\,\varphi^n(\theta_1\rho),\quad(0<\theta_1<1)$$

$$\psi(\rho)=\frac{\rho^n(1-\theta_2)^{n-p}}{1\,.\,2\,\ldots\,(n-1)\,p}\,\psi^n(\theta_2\rho),\quad(0<\theta_2<1).$$

Vem portanto

$$F(\rho)=\frac{\rho^n}{1\,.\,2\,\ldots\,(n-1)\,p}\,[(1-\theta_1)^{n-p}\varphi^n(\theta_1\rho)+i(1-\theta_2)^{n-p}\psi^n(\theta_2\rho)].$$

Applicando agora esta formula á funcção

$$F(x)=f(x)-[f(0)+xf'(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1\,.\,2\,\ldots\,(n-1)}f^{n-1}(0)],$$

cujas derivadas até á ordem $n-1$ são nullas quando $\rho=0$, vem a formula pedida:

$$(1)\qquad f(x)=f(0)+xf'(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1\,.\,2\,\ldots\,(n-1)}f^{n-1}(0)+R_n,$$

$$(2)\qquad R_n=\frac{\rho^n}{1\,.\,2\,\ldots(n-1)p}\,[(1-\theta_1)^{n-p}\varphi^n(\theta_1\rho)+i(1-\theta_2)^{n-p}\psi^n(\theta_2\rho)].$$

Cauchy punha $p=1$, mas, como se vê, o seu methodo é applicavel qualquer que seja p.

19. A'expressão de R_n, que vimos de achar, pode dar-se uma forma mais propria para a sua applicação ao desenvolvimento das funcções em série. Para isso, basta notar que, por ser $F^n(x)=f^n(x)$, temos, representando por x_1 e x_2 os valores de x cujos módulos são $\theta_1\rho$ e $\theta_2\rho$,

$$x^n f^n(x_1)=\rho^n e^{ni\omega}F^n(x_1)=\rho^n[\varphi^n(\theta_1\rho)+i\psi^n(\theta_1\rho)],$$
$$x^n f^n(x_2)=\rho^n e^{ni\omega}F^n(x_2)=\rho^n[\varphi^n(\theta_2\rho)+i\psi^n(\theta_2\rho)].$$

Podemos, pois, escrever a expressão de R_n da maneira seguinte:

$$R_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)\, p} \left[(1-\theta_1)^{n-p} R \left\{ x^n f^n (x_1) \right\} \right.$$
$$\left. + i\,(1-\theta_2)^{n-p} J \left\{ x^n f^n (x_2) \right\} \right],$$

representando por $R\left\{x^n f^n (x_1)\right\}$ a parte real de $x^n f^n (x_1)$ e por $J\left\{x^n f^n (x_2)\right\}$ o coefficiente de i na parte imaginaria de $x^n f (x_2)$.

Como porém x_1 e x_2 representam pontos da recta que passa pela origem das coordenadas e faz o angulo ω com o eixo das abscissas, temos

$$x_1 = \theta_1 \rho e^{i\omega} = \theta_1 x, \quad x_2 = \theta_2 \rho e^{i\omega} = \theta_2 x.$$

Logo podemos dar á expressão de R_n a forma

$$(2') \quad \left\{ \begin{array}{l} R_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)\, p} \left[(1-\theta_1)^{n-p} R \left\{ x^n f^n (\theta_1 x) \right\} \right. \\ \qquad\qquad \left. + i\,(1-\theta_2)^{n-p} J \left\{ x^n f^n (\theta_2 x) \right\} \right]. \end{array} \right.$$

Esta formula foi empregada por Mansion, n'uma memoria publicada nos *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (t. IX, 1885), para achar o desenvolvimento em série das funcções elementares e^x, $(1+x)^m$, $\log (1+x)$, etc.

20. Mudando $f(x)$ em $f(x+h)$, e trocando h por x, pode dar-se ás formulas (1) e (2') a forma

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} f^{n-1}(x) + R_n,$$

$$R_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)\, p} \left[(1-\theta_1)^{n-p} R \left\{ h^n f^n (x+\theta_1 h) \right\} \right.$$
$$\left. + i\,(1-\theta_2)^{n-p} J \left\{ h^n f^n (x+\theta_2 h) \right\} \right].$$

21. N'uma memoria importante, publicada em 1876 no *Journal de*

Liouville (t. II da 3.ª série), apresentou Darboux uma expressão do resto da série de Taylor, no caso das funcções de variaveis complexas, mais simples do que a precedente e que é a verdadeira extensão das formulas dadas no capitulo anterior.

Para achar esta expressão fundou-se o eminente geometra no seguinte lemma geometrico:

Se um ponto M descreve uma recta AB, variando sempre no mesmo sentido, e se um ponto m está ligado com M de módo que, quando M descreve esta recta, o ponto m descreve a curva acb, existe pelo menos uma posição d'estes pontos onde a rasão $\frac{ds}{d\rho}$ da differencial do comprimento do arco da curva para a differencial do comprimento da recta é igual ou maior do que $\frac{ab}{AB}$.

Se fosse, com effeito, para todas as posições dos pontos considerados

$$\frac{ds}{d\rho} < \frac{ab}{AB},$$

teriamos, representando por ρ_1 e ρ_2 os valores que toma ρ nos pontos A e B,

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{ds}{d\rho}\, d\rho < \frac{ab}{AB} \int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho,$$

e portanto

$$\text{arc } acb < ab,$$

o que é absurdo.

22. Posto isto, sejam

$$\varphi(z) = X + iY, \quad \psi(z) = X_1 + iY_1$$

duas funcções de uma variavel complexa z, continuas em todos os pontos de uma recta que une o ponto correspondente a x ao ponto correspondente a $x+h$, e supponhamos que, quando z percorre esta recta, $X_1 + iY_1$ per-

corre tambem a recta AB, variando sempre no mesmo sentido, e $X+iY$ percorre o arco de curva acb.

Por serem a, b, A, B, os pontos correspondentes aos numeros complexos $\varphi(x)$, $\varphi(x+h)$, $\psi(x)$, $\psi(x+h)$, temos

$$\frac{ab}{AB}=\left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{\psi(x+h)-\psi(x)}\right|.$$

Temos tambem

$$\frac{ds}{d\rho}=\frac{\sqrt{dX^2+dY^2}}{\sqrt{dX_1^2+dY_1^2}}=\left|\frac{d\varphi(z)}{d\psi(z)}\right|=\left|\frac{\varphi'(z)}{\psi'(z)}\right|.$$

Logo, applicando o lemma precedente, vê-se que existe um numero x_1, correspondente a um valor de $\psi(z)$ representado por um ponto da recta AB, e portanto comprehendido entre x e $x+h$, tal que é

$$\left|\frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)}\right|\geq\left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{\psi(x+h)-\psi(x)}\right|,$$

e portanto

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{\psi(x+h)-\psi(h)}=\lambda\frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)},$$

h representando um numero complexo, cujo modulo não póde ser superior á unidade.

A esta igualdade podemos ainda dar outra fórma. Seja KL a recta descripta pelo ponto z, K, N e L os pontos correspondentes aos imaginarios x, x_1 e $x+h$, ω o angulo d'esta recta com o eixo das abscissas, ρ', ρ'', R, b as distancias OK, OL, ON e CO. Teremos

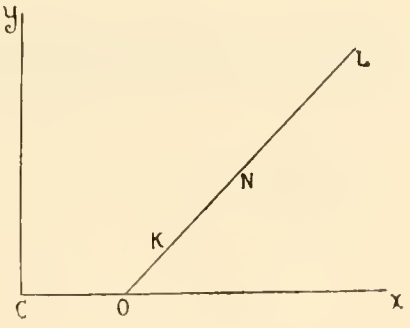


Figura 1.ª

$$x=b+\rho' e^{i\omega},\quad x+h=b+\rho'' e^{i\omega},\quad x_1=b+Re^{i\omega},$$

e portanto

$$h = (\rho'' - \rho')e^{i\omega}, \quad x_1 - x = (R - \rho')e^{i\omega};$$

mas

$$R - \rho' < \rho'' - \rho';$$

logo

$$R - \rho' = \theta\,(\rho'' - \rho'),$$

θ representando uma quantidade real comprehendida entre 0 e 1; e por consequencia

$$x_1 - x = \theta\,(\rho'' - \rho')\,e^{i\omega} = \theta h.$$

Temos pois a igualdade

$$(3) \qquad \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{\psi(x+h) - \psi(x)} = \lambda \frac{\varphi'(x+\theta h)}{\psi'(x+\theta h)}.$$

A formula que vimos de achar differe só pelo factor h da formula correspondente do numero 10.

23. Pondo

$$\psi(z) = (x + h - z)^p,$$

e notando que, se representarmos por ρ o módulo de z, temos

$$z = b + \rho e^{i\omega},$$

vê-se que é

$$X_1 + iY_1 = \psi(z) = (\rho'' - \rho)^p e^{ip\omega} = (\rho'' - \rho)^p\,(\cos p\omega + i \operatorname{sen} p\omega),$$

e portanto

$$X_1 = (\rho'' - \rho)^p \cos p\omega, \quad Y_1 = (\rho'' - \rho)^p \operatorname{sen} p\omega,$$

e

$$Y_1 = X_1 \operatorname{tang} p\omega.$$

Logo, quando z descreve a recta KL, $\psi(z)$ descreve uma recta AB.

Podemos, pois, applicar a formula (3) á funcção precedente, o que dá

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \lambda h \frac{\varphi'(x+\theta h)}{p(1-\theta)^{p-1}}.$$

Applicando esta formula á funcção considerada no numero 10,

$$\varphi(z) = f(x+h) - f(z) - (x+h-z) f'(z)$$
$$- \frac{1}{2}(x+h-z)^2 f''(z) - \ldots - \frac{(x+h-z)^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} f^{n-1}(z),$$

vem a *formula de Darboux*

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} f^{n-1}(x) + R_n,$$

$$R_n = \lambda \frac{h^n (1-\theta)^{n-p}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)\, p} f^n(x+\theta h),$$

que é a extensão ao caso das variaveis complexas das formulas (1) e (2''') do numero 10.

24. Mansion, na memoria já citada, deu uma demonstração puramente analytica do theorema de Darboux. Mais tarde, no seu *Résumé du Cours d'Analyse*, publicado em 1887, deu á expressão de R_n uma outra forma, que serve para os mesmos fins que a anterior, da qual não differe essencialmente, mas cuja demonstração analytica é mais simples e directa.

Parte para isso da expressão de R_n dada no numero 20, onde põe

$$h^n = Be^{ib}, \frac{(1-\theta_1)^{n-p}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)\, p} f^n(x+\theta_1 h) = Ce^{ic},$$

$$\frac{(1-\theta_2)^{n-p}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)\, p} f^n(x+\theta_2 h) = De^{id};$$

o que dá

$$R_n = BC\cos(b+c) + BDi\,\mathrm{sen}\,(b+d) = He^{ia},$$

representando por H a quantidade

$$H = [B^2C^2\cos^2(b+c) + B^2D^2\,\mathrm{sen}^2(b+d)]^{\frac{1}{2}}.$$

Suppondo agora $C \geqq D$, temos $H^2 \leqq 2B^2C^2$ e portanto $H = \lambda_1 BC\sqrt{2}$, onde λ_1 representa um factor positivo igual ou inferior á unidade.

Logo

$$R_n = \lambda_1\sqrt{2}\,e^{i(a-b-c)}\,h^n\frac{(1-\theta_1)^{n-p}}{1\,.\,2\,\ldots\,(n-1)\,p}f^n(x+\theta_1 h),$$

ou

$$R_n = \lambda\sqrt{2}\,\frac{h^n(1-\theta_1)^{n-p}}{1\,.\,2\,\ldots\,(n-1)\,p}f^n(x+\theta_1 h),$$

onde $|\lambda| \leqq 1$. E'esta formula que pretendiamos achar.

Se fôr $D > C$, demonstra-se o theorema do mesmo módo, pondo $H = \lambda_1 BD\sqrt{2}$.

25. Por meio de qualquer das formulas, que vimos de achar, póde-se obter o desenvolvimento em série das funcções elementares e^x, $(1+x)^k$, $\log(1+x)$ ..., procedendo como no caso das funcções de variaveis reaes. Aqui vamos considerar sómente a funcção $(1+x)^k$, de cujo desenvolvimento temos de usar adiante.

Temos n'este caso

$$(1+x)^k = 1 + \sum_{a=1}^{a=n-1}\frac{k(k-1)\ldots(k-a+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,a}x^a + R_n,$$

$$R_n = \lambda\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,(n-1)}x^n\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}(1+\theta x)^{k-1}.$$

1) Se o modulo ρ de x é menor do que a unidade, a quantidade

$$\frac{k\,(k-1)\ldots(k-n+1)}{1\,.\,2\ldots(n-1)}\,\rho^n$$

tende, como é sabido, para 0 quando n tende para o infinito. Além d'isso é

$$\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right| = \frac{1-\theta}{\sqrt{1+\theta^2\rho^2+2\theta\rho\cos\omega}} \leq \frac{1-\theta}{1-\theta\rho} < 1.$$

Logo R_n tende para 0 quando n tende para ∞, e o binomio considerado pode ser desenvolvido em série ordenada segundo as potencias de x pela formula

$$(1+x)^k = 1 + \sum_{a=1}^{a=\infty} \frac{k\,(k-1)\ldots(k-a+1)}{1\,.\,2\ldots a}\,x^a.$$

2) Se o módulo ρ é maior do que a unidade, a série precedente é divergente.

O estudo do caso em que ρ é igual á unidade não será aqui feito. A respeito d'elle pode consultar-se a memoria de Abel sobre o binomio *(Oeuvres,* t. 1) ou ainda os trabalhos de Mansion anteriormente citados.

Deve-se observar que, no caso de k ser um numero fraccionario ou um numero irracional, a funcção $(1+x)^k$ tem muitos ramos. A série anterior dá o desenvolvimento do ramo que se reduz á unidade quando $x = 0$. Para achar o desenvolvimento dos outros ramos basta attender a que estão todos comprehendidos na expressão $1^k\,(1+x)^k$, onde se deve substituir 1^k pelos seus diversos valores e $(1+x)^k$ pelo desenvolvimento que vimos de achar.

CAPITULO III

CONTINUAÇÃO DO ESTUDO DA SÉRIE DE TAYLOR, NO CASO DAS FUNCÇÕES DE VARIAVEIS COMPLEXAS. METHODO DE CAUCHY.

26. O methodo para o estudo da série de Taylor, que vamos agora expôr, é devido a Cauchy e é fundado n'uma theoria importante, devida a este grande geometra, da qual elle fez muitas e notaveis applicações. Esta theoria, que vamos expôr succintamente, foi publicada em 1825 na sua bella e importante *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires.*

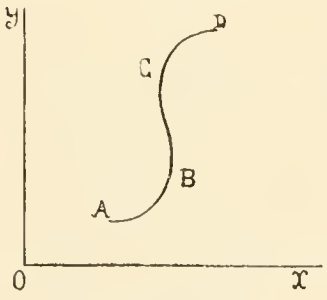


Fig. 2.ª

Consideremos uma curva composta de muitos arcos (fig. 2.ª) AB, BC, CD, ... taes que, em cada um, a cada valôr de x corresponda um unico valôr da ordenada, sejam $a, b, c, d, \ldots$ as abscissas dos pontos A, B, C, ... e $y_1, y_2, y_3, \ldots$ funcções de x, que representam os valores que toma y respectivamente nos arcos AB, BC, CD, ... Chama-se *integral curvilineo de* $f(x, y)\,dx$ tomado ao longo da curva $ABCD$..., que designaremos por S, e representa-se pela notação $\int_S f(x, y)\,dx$ a somma:

$$\int_a^b f(x, y_1)\,dx + \int_b^c f(x, y_2)\,dx + \int_c^d f(x, y_3)\,dx + \ldots$$

D'esta definição resulta immediatamente que, se a curva S fôr descripta no sentido $DCBA$, contrario ao precedente, o integral ao longo d'esta curva conserva o mesmo valôr absoluto e muda de signal.

Posto isto, vamos demonstrar o theorema fundamental, devido a Cauchy:

Se na área limitada por uma curva fechada ABC (fig. 3.ª) *as funcções* $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\psi}{dx}$ *forem continuas e tiver logar a condição* $\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\psi}{dx}$, *o integral de* $\varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy$, *tomado ao longo da curva considerada, é nullo.*

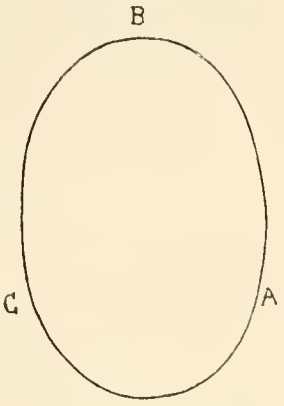


Fig. 3.ª

A demonstração que Cauchy deu d'este theorema é fundada nos principios do Calculo das variações. Mais tarde Riemann deu outra demonstração do mesmo theorema, fundada n'um theorema importante de G. Green, que adiante será estabelecido. Aqui vamos apresentar uma demonstração mais directa e que é fundada nos principios mais elementares do Calculo integral.

Consideremos primeiramente uma área $ABCD$ (fig. 4.ª) limitada por uma recta AD parallela ao eixo das ordenadas, pelas rectas AB e DC parallelas ao eixo das abscissas e por uma linha recta ou curva BC, e sejam

$$x = f_1(s),\ y = f_2(s)$$

as equações da linha ABC (f_1 e f_2 representando uma funcção ao longo de AB e outra funcção ao longo de BC, e s representando o comprimento dos arcos d'esta linha, contados a partir do ponto A) e s_1 o valor que toma s no ponto C.

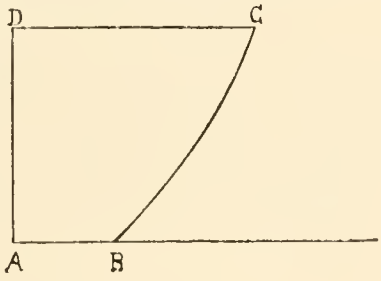


Fig. 4.ª

Integrar a expressão $\varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy$ ao longo de ABC entre os pontos A e C, cujas coordenadas são (x_0, y_0) e (x_1, y_1), é procurar

o valôr que toma no ponto s a funcção u das variaveis x e y que satisfaz á condição

$$\frac{du}{dx}\,dx+\frac{du}{dy}\,dy=\varphi\,(x,y)\,dx+\psi\,(x,y)\,dy,$$

e que é nulla quando $s=0$.

Para determinar u, podemos empregar as equações

$$\frac{du}{dx}=\varphi\,(x,y),\quad \frac{du}{dy}=\psi\,(x,y),$$

que dão primeiramente

$$u=\int_{x_0}^{x}\varphi\,(x,y)\,dx+\theta\,(y),$$

e depois

$$\psi\,(x,y)=\frac{du}{dy}=\frac{d}{dy}\int_{x_0}^{x}\varphi\,(x,y)\,dx+\frac{d\theta\,(y)}{dy},$$

ou, notando que, $\varphi\,(x,y)$ e $\dfrac{d\varphi}{dy}$ sendo, para cada valôr de y comprehendido entre y_0 e y_1, funcções continuas de x e y no intervallo de x_0 a x, o theorema de Leibnitz relativa a differenciação dos integraes é applicavel ao integral que entra n'esta igualdade,

$$\psi\,(x,y)=\int_{x_0}^{x}\frac{d\varphi\,(x,y)}{dy}\,dx+\frac{d\theta\,(y)}{dy},$$

ou

$$\psi\,(x,y)=\int_{x_0}^{x}\frac{d\psi}{dx}\,dx+\frac{d\theta\,(y)}{dy}=\psi\,(x,y)-\psi\,(x_0,y)+\frac{d\theta\,(y)}{dy};$$

e portanto

$$\psi(y) = \int_{y_0}^{y} \psi(x_0, y)\, dy.$$

Temos pois

$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} \psi(x_0, y)\, dy.$$

O valôr que toma u no ponto (x_1, y_1) é pois igual á quantidade

$$\int_{y_0}^{y_1} \psi(x_0, y)\, dy + \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y)\, dx.$$

Analysando esta expressão, vê-se que a primeira parcella coincide com o resultado que se obtem integrando $\varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy$ ao longo de AD, e que a segunda parcella coincide com o resultado que se obtem integrando a mesma expressão ao longo de DC. Logo temos, representando por (ABC), (ADC), etc., os integraes da expressão considerada, tomados respectivamente ao longo de ABC, ADC, etc.

$$(ABC) = (ADC) = -(CDA),$$

e portanto

$$(ABCDA) = 0.$$

Consideremos agora uma área limitada por um contôrno qualquer S. Decompondo-a, por meio de rectas auxiliares, parallelas aos eixos coordenados, em áreas parciaes limitadas por contôrnos $S_1, S_2, \ldots, S_k$, que estejam nas condições que vimos de considerar, temos

$$\int_S [\varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy] = \sum_{m=1}^{k} \int_{S_m} [\varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy].$$

Com effeito, no segundo membro d'esta igualdade entram os integraes

relativos a todos os lados das figuras em que se decompoz á área dada. Os integraes que correspondem ás rectas auxiliares são dous a dous iguaes e de signal contrario, por ser cada recta descripta duas vezes, cada uma em seu sentido, quando (x, y) descreve os contôrnos de duas figuras adjacentes reunidas pela recta considerada; e os integraes correspondentes ás linhas que fazem parte do contôrno S dão uma somma igual ao primeiro membro d'esta igualdade, por ser S a somma d'estas linhas.

Basta agora attender a que os integraes que entram no segundo membro são todos nullos para concluir que é

$$\int_S [\varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy] = 0.$$

O theorema que vimos de demonstrar tem applicações importantes em Analyse e em Physica mathematica. Aqui vamos immediatamente applical o á demonstração de um theorema relativo ás funcções de variaveis complexas, por meio do qual Cauchy deduziu a formula de Taylor.

27. Consideremos uma funcção da variavel complexa $z = x + iy$

$$f(z) = u + iv,$$

onde u e v representam funcções de x e y, e supponhamos que esta funcção admitte derivada. Sabe-se que n'este caso u e v satisfazem ás equações

$$\text{(A)} \qquad \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy},$$

e que, reciprocamente, se u e v satisfazem a estas equações, $u + iv$ admitte derivada. Sabe-se tambem que esta derivada é dada pela formula

$$f'(z) = \frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx}.$$

As funcções que satisfazem a estas condições são as unicas que ha interesse em estudar, e dá-se-lhes o nome de funcções *monogeneas* ou *analyticas*.

A funcção $f(z)$ pode ter um só valôr para cada valôr de z ou muitos. No primeiro d'estes casos a funcção diz-se *uniforme* ou *monodroma*. No segundo caso, se considerarmos, para determinar completamente a funcção, um dos valores que $f(z)$ toma no ponto (fig. 5.ª) B como valôr inicial, o valôr que a funcção toma n'um ponto qualquer D da área A, limitada pelo contôrno MNP, quando z descreve a curva BCD, deve ser determinado pela condição de $f(z)$ variar de uma maneira continua quando z descreve esta curva. Se este valôr é sempre o mesmo, qualquer que seja a linha descripta pelo ponto z, quando vae de B a D sem sair da área A, a funcção diz-se ainda *uniforme* ou *monodroma* na área considerada. No caso contrario diz-se *multiforme* ou *polydroma*.

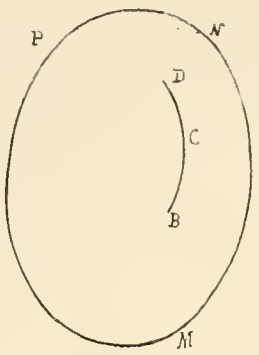


Fig. 5.ª

Se a funcção $f(z)$ é monogenea, uniforme e continua em todos os pontos de uma área A e, além d'isso, as derivadas parciaes de u e v relativamente a x e y são funcções continuas d'estas variaveis, diremos, com Çauchy, que a funcção $f(z)$ é *synectica* na área A.

28. Posto isto, temos por definição, representando por S o contôrno da área A,

$$\int_S f(z)\,dz = \int_S (u+iv)(dx+idy)$$

$$= \int_S (u\,dx - v\,dy) + i\int_S (v\,dx + u\,dy).$$

Se a funcção $f(z)$ é synectica na área A, temos tambem, em virtude do theorema demonstrado no numero anterior e das formulas (A),

$$\int_S (v\,dy - u\,dx) = 0, \quad \int_S (u\,dy + v\,dx) = 0;$$

e portanto

$$\int_S f(z)\,dz = 0.$$

Podemos pois enunciar o theorema seguinte:

Se a funcção $f(z)$ fôr synectica na área A, limitada por uma curva fechada, o integral de $f(z)\,dz$, tomado no longo do contôrno da área, é nullo.

Este theorema, publicado por Cauchy em 1825 na sua Memoria célebre sobre os integraes tomados entre limites imaginarios, atraz citada, é a base dos trabalhos d'este eminente geometra sobre a theoria das funcções de variaveis complexas. Entre os corollarios que d'elle se deduzem notaremos os seguintes, de que teremos de fazer uso:

1.° *Se a funcção $f(z)$ fôr synectica na área limitada por uma curva exterior S e pelas curvas interiores $c_1, c_2, \ldots$, temos*

$$\int_S f(z)\,dz = \int_{c_1} f(z)\,dz + \int_{c_2} f(z)\,dz + \ldots$$

os contôrnos $S, c_1, c_2, \ldots$ sendo descriptos todos no mesmo sentido.

Com effeito, o contôrno fechado (fig. 6.ª) $EDGDEBAHABFE$ limita uma área na qual a funcção é synectica; logo o theorema precedente é applicavel, e temos, representando por (ED), (DGD), etc., os integraes de $f(z)\,dz$ tomados ao longo de ED, DGD, etc.

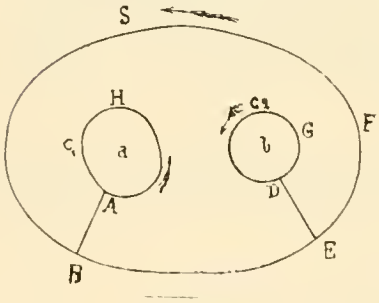


Fig. 6.ª

$$(ED)+(DGD)+(DE)+(EB)+(BA)+(AHA)+(AB)+)BFE)=0.$$

Mas

$$(ED)=-(DE),\quad (BA)=-(AB).$$

Logo temos

$$(DGD)+(EB)+(AHA)+(BFE)=0,$$

ou

$$(EFBE)=(DGD)+(AHA),$$

o que demonstra o theorema enunciado.

2.° *Se $f(z)$ fôr synectica na área limitada por um unico contôrno S e se a representar um ponto do interior d'esta área, será*

$$(B) \qquad f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f(z)\,dz}{z-a}.$$

Temos, com effeito, representando por c uma circumferencia de raio ρ, cujo centro seja o ponto representado por a e que esteja collocada no interior da curva S,

$$\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \int_c \frac{f(z)\,dz}{z-a}.$$

Mas, pondo $z - a = \rho\, e^{i\omega}$, vem

$$\int_c \frac{f(z)\,dz}{z-a} = i \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\omega})\,d\omega.$$

Logo, pondo $\varepsilon = f(a + \rho\, e^{i\omega}) - f(a)$, temos

$$\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \int_c \frac{f(z)\,dz}{z-a} = i\left[\int_0^{2\pi} f(a)\,d\omega + \int_0^{2\pi} \varepsilon\, d\omega\right].$$

Por ser continua a funcção $f(z)$, ε tende para 0 quando ρ tende para 0, e temos portanto a formula procurada

$$\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-a} = i \int_0^{2\pi} f(a)\,d\omega = 2i\pi f(a).$$

3.° *Se a funcçao $f(z)$ fôr synectica na área limitada por um contôrno exterior S e por um contôrno interior S', e se a representar um ponto do interior d'esta área, é*

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f(z)\,dz}{z-a} - \frac{1}{2i\pi} \int_{S'} \frac{f(z)\,dz}{z-a}.$$

E'o que resulta dos dous corollarios precedentes, que dão

$$\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \int_{S'} \frac{f(z)\,dz}{z-a} + \int_c \frac{f(z)\,dz}{z-a},$$

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{f(z)\,dz}{z-a}.$$

29. *Se a funcção $f(z)$ é synectica na área limitada pela curva S, temos, n'um ponto qualquer a do interior d'esta área, a igualdade*

$$f^n(a) = \frac{1.2\ldots n}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}},$$

que dá as derivadas de $f(a)$.

Temos, com effeito, por definição

$$f'(a) = \lim_{h=o}\int_S \frac{f(z)\,dz}{h}\left[\frac{1}{z-a-h} - \frac{1}{z-a}\right]dz;$$

mas

$$\frac{1}{z-a-h} = \frac{1}{z-a} + \frac{h}{(z-a)^2} + \frac{h^2}{(z-a)^2(z-a-h)};$$

logo

$$f'(a) = \int_S \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2} + \lim_{h=o}\int_S \frac{hf(z)\,dz}{(z-a)^2(z-a-h)}.$$

Basta attender agora a que temos, representando por M o maior valôr que toma $\left|\frac{f(z)}{(z-a)^2(z-a-h)}\right|$ quando z descreve a curva S e notando que é $|dz| = |dx+idy| = \sqrt{dx^2+dy^2} = ds$ (s representa o comprimento do arco que une o ponto (x,y) ao ponto fixo que se toma para origem dos arcos),

$$\left|\int_S \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2(z-a-h)}\right| < \int_S \left|\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2(z-a-h)}\right| < MS,$$

para concluir que a segunda das parcellas que entram na expressão de $f'(a)$ tende para 0 quando h tende para 0, e que portanto temos

$$f'(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2}.$$

Do mesmo modo se acham as derivadas seguintes:

30. Habilitados com os theoremas que vimos de demonstrar, podemos agora estender, seguindo Cauchy, a formula de Taylor ao caso das funcções de variaveis complexas.

Seja $f(x)$ uma funcção synectica da variavel complexa x na área limitada por um contorno S, sejam a e x dous numeros representados por dous pontos do interior da mesma área e z um numero representado por um ponto do contôrno.

A identidade

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{z^n} + \frac{x^n}{z^n(z-x)}$$

dá, substituindo x por $x-a$ e z por $z-a$,

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(z-a)^n} + \frac{(x-a)^n}{(z-a)^n(z-x)},$$

e depois, multiplicando ambos os membros por $f(z)\,dz$ e integrando ao longo do contôrno S,

$$\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-x} = \int_S \frac{f(z)\,dz}{z-a} + (x-a)\int_S \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2}$$

$$+ \ldots + (x-a)^{n-1}\int_S \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^n} + (x-a)^n \int_S \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^n(z-x)}.$$

Temos porém (numeros 28 e 29)

$$2i\pi f(a) = \int_S \frac{f(z)\,dz}{z-a}, \quad 2i\pi f(x) = \int_S \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

$$f^n(a) = \frac{1\,.\,2\,\ldots\,n}{2i\pi} \int_S \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}.$$

Logo é

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{1\,.\,2\,\ldots\,(n-1)} f^{n-1}(a) + R_n$$

onde

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{2i\pi} \int_S \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^n\,(z-x)}.$$

Temos assim a formula de Taylor com uma expressão do resto da qual Cauchy deduziu, na sua importante *Mémoire sur le Calcul des résidus et le Calcul des limites* (¹), apresentada em 1831 á Academia de Turin, o seguinte theorema, que constitue uma das suas mais bellas descobertas:

Se a funcção f(z) é synectica na área limitada por uma circumferencia, cujo centro é o ponto correspondente a a, e se x representa um ponto qualquer do interior d'esta área, tem logar o desenvolvimento em série

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{1\,.\,2\,\ldots\,n} f^n(a) + \ldots$$

Supponhamos, com effeito, que S representa uma circumferencia cujo centro é o ponto correspondente a a. Para todos os pontos z do contôrno e para todos os pontos x do interior, tem n'este caso logar a desigualdade

$$|x-a| < |z-a|.$$

(¹) *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. II, p. 50.

Por outra parte, da desigualdade seguinte, que resulta immediatamente da noção de integral definido,

$$|R_n| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_S \left| \frac{x-a}{z-a} \right|^n \left| \frac{f(z)}{z-x} \right| |dz|$$

deduz-se, notando que é $|dz| = \sqrt{dx_1^2 + dy_1^2} = ds$ (pondo $z = x_1 + iy_1$) e representando por M o maior valôr que toma $\left| \frac{f(z)}{z-x} \right|$, quando z descreve a circumferencia S, e por z_1 o valôr que toma z no ponto de S mais proximo do correspondente a a,

$$|R_n| < \frac{SM}{2\pi} \left| \frac{x-a}{z_1-a} \right|^n.$$

Basta attender agora a que é $|x-a| < |z_1 - a|$ para concluir que $|R_n|$ tende para 0 quando n tende para o infinito, e portanto que $f(x)$ pode ser desenvolvida pela série de Taylor.

31. Não nos occuparemos aqui a deduzir as consequencias importantes que se tiram d'este theorema nem a mostrar o papel fundamental que elle representa na theoria geral das funcções (1). Faremos sómente excepção para o principio seguinte, porque teremos de fazer d'elle uso adiante.

Seja $f(x)$ uma funcção synectica na área A limitada por um contôrno S, e procuremos o numero de raizes que a equação $f(x) = 0$ tem no interior d'este contôrno.

Sejam $a, b, c, \ldots$ estas raizes e $m, n, \ldots$ os seus gráos de multiplicidade, e representem-se por $S', S'', \ldots$ etc. circumferencias cujos centros sejam os pontos correspondentes a $a, b, \ldots$ e cujos raios sejam tão pequenos que ellas não cortem o contôrno S e cada uma contenha no interior só uma raiz.

---

(1) Para um estudo desenvolvido da theoria geral das funcções monogeneas póde consultar-se, entre outras obras, a seguinte: A. R. Forsyth, *Theory of Functions of a complex variable*, London, 1893.

Teremos (n.° 28—1.°)

$$\int_S \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = \int_{S'} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} + \int_{S''} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} + \ldots,$$

e, em virtude do theorema anterior,

$$f(x) = (x-a)^m P_1(x-a),$$
$$f(x) = (x-b)^n P_2(x-a),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$P_1(x-a)$, $P_2(x-a)$, ... representando séries ordenadas respectivamente segundo as potencias de $x-a$, $x-b$, ..., e a primeira igualdade tendo logar na área limitada pelo contôrno S', a segunda na área limitada pelo contôrno S'', etc.

Das igualdades anteriores tira-se

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{x-a} + \frac{P'_1(x-a)}{P_1(x-a)},$$
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{n}{x-b} + \frac{P'_2(x-b)}{P_2(x-b)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e portanto (n.° 28)

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{S'} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = \frac{m}{2i\pi}\int_{S'} \frac{dz}{z-a} = m,$$
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{S''} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = \frac{n}{2i\pi}\int_{S''} \frac{dz}{z-b} = n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Temos pois

$$m+n+\ldots = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f'(z)\,dz}{f(z)}.$$

Esta formula dá o numero de raizes da equação $f(x) = 0$, contidas no interior do contôrno S, expresso por meio de um integral curvilineo tomado ao longo do contôrno.

32. Passando agora a considerar os desenvolvimentos ordenados segundo as potencias inteiras, positivas e negativas, da variavel, seja $f(z)$ uma funeção synectiea na área annular limitada por duas circumferencias concentricas de raio R e R', e sejam x um ponto qualquer do interior d'esta área e a o centro das circumferencias.

Temos n'este caso (n.° 28—3.°)

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-x} - \frac{1}{2i\pi}\int_{S'} \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

representando por S e S' as circumferencias de raio R e R' consideradas.

Applicando ao primeiro integral a analyse desenvolvida no n.° 30, vem

$$\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-x} = \int_S \frac{f(z)\,dz}{z-a} + (x-a)\int_S \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2}$$
$$+ \ldots + (x-a)^{n-1}\int_S \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^n} + \ldots$$

Para achar o segundo integral partiremos da igualdade

$$\frac{1}{z-x} = -\left[\frac{1}{x-a} + \frac{z-a}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(x-a)^n} + \frac{(z-a)^n}{(x-a)^n(x-z)}\right],$$

que dá

$$\int_{S'} \frac{f(z)\,dz}{z-x} = -\frac{1}{x-a}\int_{S'} f(z)\,dz - \frac{1}{(x-a)^2}\int_{S'} (z-a)f(z)\,dz$$
$$- \ldots - \frac{1}{(x-a)^n}\int_{S'} (z-a)^{n-1} f(z)\,dx + R'_n,$$

onde

$$R'_n = -\int_{S'} \left(\frac{z-a}{x-a}\right)^n \frac{f(z)\,dz}{x-z}.$$

Por ser, ao longo de S', $|z-a| < |x-a|$, vê-se, procedendo como se fez no n.º 30 a respeito de R_n, que $|R_n'|$ tende para 0 quando n tende para o infinito.

Logo temos a formula

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(x-a)^n},$$

onde é

$$A_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{S'} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}},$$

$$B_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{S'} (z-a)^{n-1} f(z)\,dz.$$

A formula que vimos de achar é conhecida pelo nôme de *formula de Laurent* e tem uma importancia consideravel na theoria das funcções. Foi apresentada por este geometra á Academia das Sciencias de Paris em 1843 e foi objecto de um parecer de Cauchy, onde se indicam diversos modos de a obtêr *(Comptes rendus*, t. XVI).

Pondo $z - a = R' e^{i\omega}$, pode-se ainda exprimir A_n e B_n por meio de integraes definidos:

$$A_n = \frac{1}{2\pi R'^n} \int_0^{2\pi} f(a + R' e^{i\omega})\, e^{-ni\omega} d\omega,$$

$$B_n = \frac{R'^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + R' e^{i\omega})\, e^{ni\omega}\, d\omega.$$

CAPITULO IV

CONTINUAÇAO DO ESTUDO DA SÉRIE DE TAYLOR NO CASO DAS FUNCÇÕES DE VARIAVEIS COMPLEXAS. METHODO DE RIEMANN

33. Seja $f(x) = u + iv$ uma funeção monogenea da variavel complexa $x = x + iy$. Já dissemos que as funcções u e v devem satisfazer ás equações

$$\frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}, \quad \frac{dv}{dy} = \frac{du}{dx}, \tag{1}$$

e portanto ás equações seguintes, que resultam das anteriores:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = 0.$$

As propriedades das funcções monogeneas podem, pois, ser tiradas das propriedades das funcções que satisfazem á equação ás derivadas parciaes de segunda ordem

$$\frac{d^2Z}{dx^2} + \frac{d^2Z}{dy^2} = o, \tag{2}$$

ás quaes se dá o nôme de *funcções harmonicas.*

Para vêr como por este methodo, proposto por Riemann (1), se obtem a formula de Taylor e o theorema de Cauchy demonstrado no n.° 30, vamos estudar algumas propriedades das funcções harmonicas das quaes teremos de fazer uso (2).

34. Para estudar as propriedades das funcções que satisfazem ás equações (2) fundou-se Riemann n'um theorema importante, publicado em 1828 por G. Green, que vamos primeiramente demonstrar.

Consideremos o integral duplo seguinte, referido a uma área A limitada por uma curva que não possa ser cortada em mais de dous pontos pelas rectas parallelas aos eixos das coordenadas:

$$\int\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dy \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx,$$

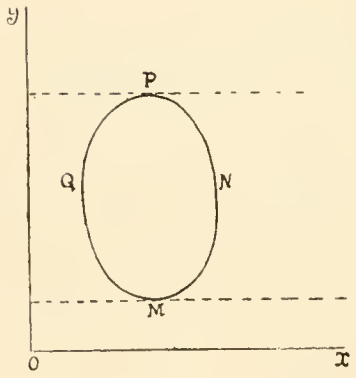


Fig. 7.ª

onde $x_1 = \theta_1(y)$, $x_2 = \theta_2(y)$ são as equações (fig. 7.ª) dos arcos MQP e MNP da curva, que limita A, e a, b são as ordenadas dos pontos M e P, onde as ordenadas são minima e maxima; e seja

$$\int f(x,y)\,dx = F(x,y) + C,$$

C representando uma constante arbitaria.

Teremos

$$\int\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b F(x_2,y)\,dy - \int_a^b F(x_1,y)\,dy.$$

---

(1) *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grosse*, 1851.

(2) Para um estudo mais completo das funcções harmonicas veja-se PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, 1892.

Por outra parte, representando por S a curva que limita A e attendendo á definição de integral curvilineo dada no n.º 26, temos tambem

$$\int_S F(x,y)\,dy = \int_a^b F(x_2,y)\,dy + \int_b^a F(x_1,y)\,dy,$$

o integral sendo tomado ao longo d'esta curva n'um sentido tal que A fique á esquerda de um observador que percorra o seu contôrno (sentido a que se dá o nôme de *directo* ou *positivo*).

D'estas igualdades resulta a formula

$$(a)\qquad \int\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_A \frac{dF(x,y)}{dx}\,dx\,dy = \int_S F(x,y)\,dy.$$

Do mesmo modo se demonstra a formula

$$(b)\qquad \int\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_A \frac{dF_1(x,y)}{dy}\,dx\,dy = -\int_S F_1(x,y)\,dx,$$

suppondo que o contôrno S é ainda descripto no sentido directo.

As formulas precedentes podem ser estendidas ao caso de A ter uma fórma differente da que vimos de considerar. Decompondo A em outras figuras $A_1, A_2, A_3, \ldots$ cujos contôrnos não sejam cortados pelas rectas parallelas a eixos coordenados em mais de dous pontos, estes contôrnos são formados por porções do contôrno A, as quaes representaremos por S_1, $S_2, \ldots$ e pelas linhas auxiliares empregadas para fazer a descomposição de A nas figuras $A_1, A_2, \ldots$, as quaes representaremos por $s_1, s_2, \ldots$ Logo temos, suppondo que os contornos $A_1, A_2, \ldots$ são descriptos no sentido directo,

$$\int\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \Sigma \int\int_{A_i} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \Sigma \int_{S_i} F(x,y)\,dy + \Sigma \int_{s_i} F(x,y)\,dy.$$

E' facil porêm de vêr que cada linha $s_1, s_2, \ldots$ é descripta duas vezes, uma em cada sentido, quando são descriptos os contôrnos de duas áreas separadas por esta linha; portanto, a cada parcella da somma $\Sigma \int_{s_i} f(x,y)\,dy$ corresponde outra igual e de signal contrario, esta somma é nulla e temos

$$\int\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \Sigma \int_{S_i} F(x,y)\,dy = \int_S F(x,y)\,dy.$$

35. As formulas (a) e (b) são as formulas de Green, que pretendíamos achar. Antes de as applicar ao estudo das funcções harmonicas, observaremos que Riemann tirou d'ellas o theorema de Cauchy demonstrado no n.º 26, applicando-as ás funcções $\frac{d\psi}{dx}$ e $\frac{d\varphi}{dy}$. Vem, com effeito,

$$\int\int_A \frac{d\psi}{dx}\,dx\,dy = \int_S \psi(x,y)\,dy, \quad \int\int_A \frac{d\varphi}{dy}\,dx\,dy = -\int_S \varphi(x,y)\,dx,$$

e portanto

$$\int\int_A \left(\frac{d\psi}{dx} - \frac{d\varphi}{dy}\right) dx\,dy = \int_S [\varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy].$$

Basta attender agora a que as funcções φ e ψ consideradas no n.º 26 satisfazem por hypothese a condição $\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\psi}{dx}$, para se obter a igualdade

$$\int_S [\varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy] = 0,$$

que pretendiamos demonstrar.

36. Passando agora ao estudo das funcções harmonicas, vamos primeiramente achar, fundados nas formulas de Green, uma expressão d'estas funcções por meio de um integral curvilineo.

Sejam U e V duas funcções de x e y continuas, assim como as suas derivadas parciaes de primeira ordem, na área A, limitada por um contôrno S. Applicando o theorema de Green á funcção

$$\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy}+U\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}\right),$$

que é igual a

$$\frac{d}{dx}\left(U\frac{dV}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(V\frac{dU}{dy}\right),$$

vem

$$\int\int_A\left(\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy}\right)dxdy$$

$$=\int_S U\left(\frac{dV}{dx}dy-\frac{dV}{dy}dx\right)-\int\int_A U\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}\right)dxdy,$$

e portanto, se V representar uma funcção harmonica,

$$\int\int_A\left(\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy}\right)dxdy=\int_S U\left(\frac{dV}{dx}dy-\frac{dV}{dy}dx\right).$$

Do mesmo modo se acha, U representando uma funcção harmonica,

$$\int\int_A\left(\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy}\right)dxdy=\int_S V\left(\frac{dU}{dx}dy-\frac{dU}{dy}dx\right).$$

D'esta igualdade e da anterior resulta a seguinte:

$$(3)\qquad \int_S\left[U\left(\frac{dV}{dx}dy-\frac{dV}{dy}dx\right)-V\left(\frac{dU}{dx}dy-\frac{dU}{dy}dx\right)\right]=0,$$

que dá, pondo $U=1$, visto que 1 é uma solução da equação (2),

$$(4)\qquad \int_S\left(\frac{dV}{dx}dy-\frac{dV}{dy}dx\right)=0.$$

Se a área A fôr limitada por um contôrno exterior C (fig. 8.ª) e por um contôrno interior c, teremos, applicando a formula (3) ao contôrno unico $BCDBAFEAB$, e representando por $(BCDB)$, (BA), etc. os integraes da funcção que entra em (3), tomados respectivamente ao longo de $BCDB$, BA, etc.,

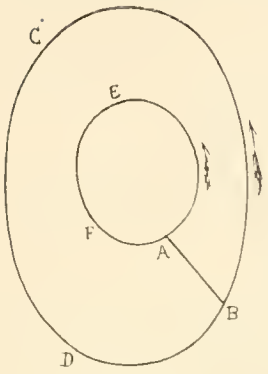


Fig. 8.ª

$$(BCDB) + (BA) + (AFEA) + (AB) = 0,$$

ou, por ser $(BA) = -(AB)$,

$$(BCDB) + (AFEA) = 0,$$

ou

$$(BCDB) = (AEFA).$$

Porisso, suppondo que os contôrnos C e c são descriptos no sentido indicado pelas flechas, podemos escrever a igualdade

$$\int_C \left[U\left(\frac{dV}{dx}dy - \frac{dV}{dy}dx\right) - V\left(\frac{dU}{dx}dy - \frac{dU}{dy}dx\right)\right]$$
$$= \int_c \left[U\left(\frac{dV}{dx}dy - \frac{dV}{dy}dx\right) - V\left(\frac{dU}{dx}dy - \frac{dU}{dy}dx\right)\right].$$

É facil verificar que a funcção

$$U = \log z,$$

onde

$$z = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

satisfaz á equação (2), e portanto que a funcção $\log z$ é harmonica. A formula anterior dá porisso, suppondo que o ponto (a, b) está no interior da curva c,

$$(5)\quad \begin{cases} \int_C \left[\log z\left(\frac{dV}{dx}dy - \frac{dV}{dy}dx\right) - V\left(\frac{d\log z}{dx}dy - \frac{d\log z}{dy}dx\right)\right] \\ = \int_c \left[\log z\left(\frac{dV}{dx}dy - \frac{dV}{dy}dx\right) - V\left(\frac{d\log z}{dx}dy - \frac{d\log z}{dy}dx\right)\right]. \end{cases}$$

37. Tomemos agora para contôrno interior c uma circumferencia de raio ρ e centro (a, b), e supponhamos que a funcção V e suas derivadas parciaes de primeira ordem são funcções continuas de x e y. Teremos, pondo

$$x = a + \rho\cos t, \quad y = b + \rho\,\mathrm{sen}\,t,$$

e attendendo á formula (4),

$$(6)\quad \int_c \log z\left(\frac{dV}{dx}dy - \frac{dV}{dy}dx\right) = \log\rho\int\left(\frac{dV}{dx}dy - \frac{dV}{dy}dx\right) = 0,$$

$$\int_c V\left(\frac{d\log z}{dx}dy - \frac{d\log z}{dy}dx\right) = \int_c V\left(\frac{x-a}{z^2}dy - \frac{y-b}{z^2}dx\right)$$

$$= \int_c V dt = \int_0^{2\pi} V dt.$$

Tornando explicitas as variaveis x e y que entram em V, podemos substituir V por $V(x, y)$ e temos, applicando o primeiro theorema dos medios valores dos integraes definidos,

$$\int_0^{2\pi} V dt = \int_0^{2\pi} V(a + \rho\cos t,\ b + \rho\,\mathrm{sen}\,t)\,dt$$

$$= 2\pi V(a + \rho\cos t_1,\ b + \rho\,\mathrm{sen}\,t_1)\,dt,$$

t_1 representando um numero comprehendido entre 0 e 2π. A igualdade anterior dá portanto

$$\int_c V\left(\frac{d\log z}{dx}dy - \frac{d\log z}{dy}dx\right) = 2\pi V(a + \rho\cos t_1,\ b + \rho\,\mathrm{sen}\,t_1),$$

e, fazendo tender ρ para zero,

$$\int_c V\left(\frac{d\log z}{dx}dy - \frac{d\log z}{dy}dx\right) = 2\pi V(a, b).$$

D'esta igualdade e das igualdades (5) e (6) tira-se finalmente a formula seguinte:

$$(7)\qquad \begin{cases} V(a,b) = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_C \Big[\log z\Big(\frac{dV}{dx}\,dy - \frac{dV}{dy}\,dx\Big) \\ \qquad\qquad -V\Big(\dfrac{d\log z}{dx}\,dy - \dfrac{d\log z}{dy}\,dx\Big)\Big], \end{cases}$$

que dá os valores da funcção harmonica V expressos por meio de um integral definido e que representa no methodo de Riemann o mesmo papel que a igualdade (B) do n.º 28 representa no methodo do Cauchy.

38. Para dar um segundo passo para a resolução da questão que estamos considerando, vamos tirar d'esta formula outra que dê os valores de V expressos por um integral definido ordinario. Para isso vamos porêm primeiramente demonstrar um lemma de que teremos de fazer uso.

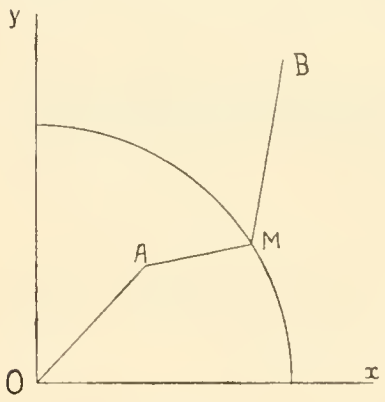


Fig. 9.ª

Consideremos um circulo de centro O e raio R (fig. 9.ª), e seja A um ponto collocado no interior d'este circulo, cujas coordenadas são a e b.

Vejamos se existe um ponto B, exterior ao circulo, tal que seja constante, para todos os pontos da circunferencia, a razão $\dfrac{AM}{BM}$.

Representando por α e β as coordenadas do ponto B, por x e y as do ponto M e por c^2 uma constante, teremos

$$\frac{AM^2}{BM^2} = \frac{z^2}{z_1^2} = \frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = c^2,$$

e portanto, sendo O a origem das coordenadas,

$$R^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 = c^2(R^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2),$$

ou, pondo $a = \rho \cos \varphi$, $b = \rho \operatorname{sen} \varphi$, $\alpha = \rho_1 \cos \varphi_1$, $\beta = \rho_1 \operatorname{sen} \varphi_1$,

$$R^2 - 2\rho x \cos\varphi - 2\rho y \operatorname{sen}\varphi + \rho^2 = c^2 [R^2 - 2\rho_1 x \cos\varphi_1 - 2\rho_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + \rho_1^2].$$

Satisfaz-se a esta igualdade pondo

$$\rho_1 = \frac{R^2}{\rho}, \quad c = \frac{\rho}{R}, \quad \varphi = \varphi_1, \tag{8}$$

como é facil verificar, e vê-se que é $\rho_1 > R$.

D'estas igualdades conclue-se o lemma seguinte:

Dado um circulo de raio R *e um ponto* A *no interior, existe outro ponto* B, *exterior ao mesmo circulo e situado sobre a recta que une o primeiro ponto ao centro do circulo, tal que a razão geometrica das distancias* AM *e* BM *é constante, qualquer que seja* M. *A distancia do ponto* B *ao centro do circulo é dada pela primeira das formulas* (8) *e o valôr da constante é dado pela segunda.*

39. Posto isto, tomemos para contôrno da integração na igualdade (7) a circumfereneia a que vimos de nos referir, e notemos que a igualdade (3) dá, pondo $U = \frac{1}{2} \log [(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2] = \log z_1$ e attendendo a que $\log z_1$ e V são funcções continuas de x e y no interior da área A,

$$-\frac{1}{2\pi} \int_C \left[\log z_1 \left(\frac{dV}{dx} dy - \frac{dV}{dy} dx \right) - V \left(\frac{d \log z_1}{dx} dy - \frac{d \log z_1}{dy} dx \right) \right] = 0$$

e a que a igualdade (4) dá, por ser $\frac{z}{z_1}$ constante,

$$-\frac{1}{2\pi} \int_C \log \frac{z}{z_1} \left(\frac{dV}{dx} dy - \frac{dV}{dy} dx \right) = 0.$$

Sommando membro a membro estas igualdades e a igualdade (7), vem

$$V(a,b) = -\frac{1}{2\pi} \int_C V \left[\frac{d \log z_1}{dx} dy - \frac{d \log z_1}{dy} dx - \frac{d \log z}{dx} dy + \frac{d \log z}{dy} dx \right],$$

ou

$$V(a,b) = -\frac{1}{2\pi}\int_C V\left[\frac{x-\alpha}{z_1^2}\,dy - \frac{y-\beta}{z_1^2}\,dx - \frac{x-a}{z^2}\,dy + \frac{y-b}{z^2}\,dx\right],$$

ou, por ser $c = \frac{\rho}{R} = \frac{x}{x_1}$,

$$V(a,b) = -\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{V}{z^2}\left[\frac{\rho^2}{R^2}(x-\alpha)\,dy - \frac{\rho^2}{R^2}(y-\beta)\,dx - (x-a)\,dy + (y-b)\,dx\right]$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{V}{z^2 R^2}\left[(R^2-\rho^2)(y\,dx - x\,dy) - (\alpha\rho^2 - aR^2)\,dy + (\beta\rho^2 - bR^2)\,dx\right],$$

ou, attendendo ás igualdades

$$\rho\rho_1 = R^2, \quad \frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{R^2}{\rho^2},$$

$$V(a,b) = -\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{V(R^2-\rho^2)}{z^2 R^2}(y\,dx - x\,dy).$$

Pondo n'esta formula

$$x = R\cos\psi, \quad y = R\operatorname{sen}\psi$$

e attendendo á igualdade

$$z^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 = (R\cos\psi - \rho\cos\varphi)^2 + (R\operatorname{sen}\psi - \rho\operatorname{sen}\varphi)^2$$
$$= R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\psi - \varphi)$$

vem a formula

$$V(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{V(R\cos\psi, R\operatorname{sen}\psi)(R^2-\rho^2)\,d\psi}{R^2 - 2R\rho\cos(\psi-\varphi) + \rho^2},$$

que determina, por meio de um integral definido, os valores que a funcção harmonica $V(a, b)$ toma no interior do contôrno C.

40. Partindo d'esta integral, vamos exprimir os valores da funcção harmonica por meio de um desenvolvimento em série.

E' facil de vêr que é

$$\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2}=-1+\frac{R}{R-\rho e^{i(\psi-\varphi)}}+\frac{R}{R-\rho e^{-i(\psi-\varphi)}},$$

$$\frac{R}{R-\rho e^{\pm i(\psi-\varphi)}}=1+\sum_{m=1}^{n}\frac{\rho^m}{R^m}e^{\pm mi(\psi-\varphi)}$$

$$+\frac{\rho^n}{R^n}\cdot\frac{\rho e^{\pm(n+1)i(\psi-\varphi)}}{R-\rho e^{\pm i(\psi-\varphi)}},$$

e portanto

$$\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2}=1+2\sum_{m=1}^{n}\frac{\rho^m}{R^m}\cos m(\psi-\varphi)$$

$$+\frac{\rho^n}{R^n}\cdot\frac{2\left[R\rho\cos(n+1)(\psi-\varphi)-\rho^2\cos n(\psi-\varphi)\right]}{R^2-2R\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2}.$$

Logo

$$V(a,b)=\sum_{m=0}^{n}\rho^m(a_m\cos m\varphi+b_m\operatorname{sen} m\varphi)$$

$$+\frac{1}{\pi}\frac{\rho^{n+1}}{R^n}\int_0^{2\pi}\frac{V\left[R\cos(n+1)(\psi-\varphi)-\rho\cos n(\psi-\varphi)\right]}{R^2-2R\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2}d\psi,$$

onde

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}V(R\cos\psi,R\operatorname{sen}\psi)\,d\psi,$$

$$a_m=\frac{1}{\pi R^m}\int_0^{2\pi}V(R\cos\psi,R\operatorname{sen}\psi)\cos m\psi d\psi,$$

$$b_m=\frac{1}{\pi R^m}\int_0^{2\pi}V(R\cos\psi,R\operatorname{sen}\psi)\operatorname{sen} m\psi d\psi,$$

e $m=1, 2, 3, \ldots$

Fazendo tender n para o infinito e attendendo a que, por ser $\rho < R$, o ultimo termo da expressão anterior de $V(a, b)$ tende para zero, esta formula dá o desenvolvimento em série da funcção harmonica:

$$(9) \qquad V(a,b) = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m (a_m \cos m\varphi + b_m \operatorname{sen} m\varphi).$$

41. Estudemos agora as séries

$$(a) \qquad F = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \rho^m \cos m\varphi, \quad F_1 = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \rho^m \operatorname{sen} m\varphi,$$

que entram na formula que vimos de achar, e notemos que estas séries são convergentes, como acabamos de vêr, quando φ e ρ representam as coordenadas polares dos pontos de um circulo de raio R' inferior a R.

Como a série $\sum_{m=0}^{\infty} a_m R'^m$ é convergente, os valores absolutos das seus termos não podem exceder um numero positivo A, convenientemente escolhido; temos pois

$$| a_m | R'^m < A,$$

e portanto

$$| a_m | \rho_1^m < A \left(\frac{\rho_1}{R'}\right)^m.$$

Esta desigualdade mostra que os termos da série

$$(b) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} m | a_m | \rho_1^{m-1}$$

são menores do que os termos correspondentes da série

$$\frac{A}{\rho_1} \sum_{m=1}^{\infty} m \left(\frac{\rho_1}{R'}\right)^m,$$

a qual é convergente quando $\rho_1 < R'$; logo aquella série é tambem convergente para os mesmos valores de ρ_1.

Seja agora R_n o resto da série (*b*), isto é, seja

$$R_n = \sum_{m=n}^{\infty} m \mid a_m \mid \rho_1^{m-1}.$$

Por ser convergente a série considerada, a cada valôr de δ, por mais pequeno que seja, corresponde um numero n_1 tal que é $\mid R_n \mid < \delta$, quando $n > n_1$.

Mas os termos da série

$$(c) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} m a_m \rho^{m-1} \cos m\varphi,$$

que é formada pelas derivadas relativamente a ρ dos termos da primeira das séries (*a*), são inferiores em valor absoluto aos termos correspondentes da série (*b*), quando é $\rho \leqq \rho_1$, qualquer que seja φ. Logo temos a desigualdade

$$\mid \sum_{m=n}^{\infty} a_m m\rho^{m-1} \cos m\varphi \mid < \delta,$$

para $n > n_1$, a qual mostra que a série (*c*) é uniformemente convergente para todos os valores de φ e ρ correspondentes aos pontos do circulo de raio ρ_1.

Basta agora applicar um theorema bem conhecido, relativo á derivação das series, para vêr que tem logar a igualdade

$$\frac{dF}{d\rho} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m m\rho^{m-1} \cos m\varphi.$$

Do mesmo módo se demonstra a igualdade

$$\frac{dF}{d\varphi} = -\sum_{m=1}^{\infty} a^m m\rho^{m-1} \operatorname{sen} m\varphi.$$

A segunda das séries (*a*) pode ser considerada do mesmo módo e obtéem-se resultados analogos.

42. Posto isto, vamos agora vêr como a formula (9) conduz com a maior facilidade á resolução da questão que se pertende resolver.

Seja

$$f(z) = u + iv$$

a funcção proposta, que suppomos synectica no circulo de raio R, e seja (x, y) um ponto (até agora representado por (a, b)) do interior d'este circulo.

As funcções u e v satisfazem, por hypothese, á equação (2), e temos portanto, em virtude da formula (9),

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m (a_m \cos m\varphi + b_m \operatorname{sen} m\varphi),$$

$$v = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m (\alpha_m \cos m\varphi + \beta_m \operatorname{sen} m\varphi).$$

Mas, por ser $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \operatorname{sen} \varphi$, temos

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}, \quad \frac{d\rho}{dy} = \cos\varphi, \quad \frac{d\rho}{dy} = \operatorname{sen}\varphi, \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{\cos\varphi}{\rho},$$

e portanto

$$(10) \quad \begin{cases} \dfrac{d(\rho^m \cos m\varphi)}{dx} = m\rho^{m-1} \cos(m-1)\varphi, \\ \dfrac{d(\rho^m \operatorname{sen} m\varphi)}{dx} = m\rho^{m-1} \operatorname{sen}(m-1)\varphi, \\ \dfrac{d(\rho^m \cos m\varphi)}{dy} = -m\rho^{m-1} \operatorname{sen}(m-1)\varphi, \\ \dfrac{d(\rho^m \operatorname{sen} m\varphi)}{dy} = m\rho^{m-1} \cos(m-1)\varphi. \end{cases}$$

Substituindo agora na igualdade

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}$$

os desenvolvimentos de u e v anteriormente escriptos, e attendendo ás igualdades anteriores, vem

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\rho^{m-1}[a_m \cos(m-1)\varphi + b_m \operatorname{sen}(m-1)\varphi]$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} m\rho^{m-1}[-\alpha_m \operatorname{sen}(m-1)\varphi + \beta_m \cos(m-1)\varphi].$$

Pondo n'esta equação $\varphi = 0$, vem a seguinte:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m a_m \rho^{m-1} = \sum_{m=1}^{\infty} m\beta_m \rho^{m-1},$$

que, devendo ter logar para todos os valores de ρ, na vesinhança de $\rho = 0$, mostra que é

$$a_m = \beta_m, \qquad (m > 0).$$

A mesma equação dá depois a seguinte:

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m m\rho^{m-1} \operatorname{sen}(m-1)\varphi = -\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m m\rho^{m-1} \operatorname{sen}(m-1)\varphi,$$

que, depois de dar a φ um valor determinado qualquer, devendo ainda ter logar para todos os valores de ρ, na vesinhança de $\rho = 0$, mostra que é

$$b_m = -\alpha_m, \qquad (m > 0).$$

Temos pois a igualdade

$$f(z) = u + iv = a_0 + i\alpha_0$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m [a_m \cos m\varphi + b_m \operatorname{sen} m\varphi - ib_m \cos m\varphi + ia_m \operatorname{sen} m\varphi],$$

ou

$$f(z) = a_0 + i\alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (a_m - ib_m)(\cos m\varphi + i \operatorname{sen} m\varphi),$$

ou finalmente

$$f(z) = a_0 + i\alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m - ib_m) z^m.$$

Temos pois o theorema de Cauchy já demonstrado no n.° 30:

A funcção f (z) *é susceptivel de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias inteiras e positivas de* z, *quando* z *representa um ponto qualquer do interior do circulo de raio* R *no qual é synectica.*

43. Para completar esta questão, resta ainda determinar, seguindo o mesmo methodo, os coefficientes do desenvolvimento precedente. Para isso, vamos considerar as séries da fórma

$$f_1(z) = u_1 + iv_1 = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \rho^m (\cos m\varphi + i \operatorname{sen} m\varphi),$$

$$f_2(z) = u_2 + iv_2 = -i \sum_{m=1}^{\infty} b_m \rho^m (\cos m\varphi + i \operatorname{sen} m\varphi),$$

que estão nas condições das séries que entram na formula anterior, isto é que são convergentes para todos os valores de φ e ρ que são coordenadas polares dos pontos de um circulo de raio R.

Temos, attendendo ás formulas (10) do n.° anterior,

$$\frac{du_1}{dx} = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m \rho^{m-1} \cos(m-1)\varphi,$$

$$\frac{dv_1}{dx} = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m \rho^{m-1} \operatorname{sen}(m-1)\varphi,$$

$$\frac{du_1}{dy} = -\sum_{m=1}^{\infty} m a_m \rho^{m-1} \operatorname{sen}(m-1)\varphi,$$

$$\frac{dv_1}{dy} = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m \rho^{m-1} \cos(m-1)\varphi.$$

Vê-se pois que as igualdades (1) são satisfeitas pela funcção $u_1 + iv_1$, e portanto que esta funcção é monogenea. A sua derivada relativamente a x é pois dada (n.° 27) pela formula

$$f'_1(z) = \frac{du_1}{dx} + i\frac{dv_1}{dx}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} m a_m \rho^{m-1} [\cos(m-1)\varphi + i \operatorname{sen}(m-1)\varphi] = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m z^{m-1};$$

o que mostra que se obtem esta derivada derivando cada termo da série

$$f_1(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m.$$

Como a derivada de $f_1(z)$ está tambem ordenada segundo as potencias inteiras e positivas de z, conclue-se do mesmo módo que é monogenea e que admitte uma derivada.

$$f_1''(z) = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)\, a_m z^{m-2},$$

dada por uma série cujos termos se formam derivando os termos do desenvolvimento de $f_1'(z)$.

Continuando do mesmo módo temos a formula geral

$$f_1^n(z) = \sum_{m=n}^{\infty} m(m-1)\ldots(m-n+1)\, a_m z^{m-n},$$

que, pondo $z = 0$, dá

$$a_n = \frac{f_1^n(0)}{1 \cdot 2 \ldots n}.$$

Considerando do mesmo módo a funcção $f_2(z)$, vê-se que é

$$-ib_n = \frac{f_2^n(0)}{1 \cdot 2 \ldots n}.$$

Temos pois finalmente

$$a_n - ib_n = \frac{f_1^n(0) + f_2^n(0)}{1 \cdot 2 \ldots n} = \frac{f^n(0)}{1 \cdot 2 \ldots n},$$

o que dá a formula de Maclaurin

$$f(z) = f(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f^m(0)}{1 \cdot 2 \ldots n} z^n.$$

Pondo $f(z) = F(z + a)$, deduz-se d'esta formula a de Taylor

$$F(z + a) = F(a) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F^m(a)}{1 \cdot 2 \ldots m} z^m,$$

ou, mudando z em $z - a$,

$$F(z) = F(a) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F^m(a)}{1 \cdot 2 \ldots m} (z - a)^m,$$

que tem logar quando é $| z - a | < R$.

CAPÍTULO V

CONTINUAÇÃO DO ESTUDO DAS SÉRIES DE TAYLOR E DE LAURENT NO CASO DAS FUNCÇÕES DE VARIAVEIS COMPLEXAS. METHODO DE WEIERSTRASS E MITTAG-LEFFLER

44. Se, para os valores de x visinhos de um valor a, tiver logar o desenvolvimento

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots \tag{1}$$

a funcção $f(x)$ diz-se *regular* na vesinhança do ponto a. Se esta propriedade tiver logar para todos os valores de a representados pelos pontos de uma área A, a funcção $f(x)$ diz-se *regular na área* A.

Viu-se no Capitulo III que as funcções analyticas são regulares nas áreas em que são synecticas. A theoria d'estas funcções coincide portanto com a theoria das funcções regulares n'uma certa área, e pode porisso ser feita, sem a intervencção da theoria dos integraes curvilineos, por meio das propriedades das séries da fórma (1). Este módo de expôr a theoria considerada, cuja primeira ideia remonta a Lagrange, tem sido empregado principalmente por Weierstrass e Mittag-Leffler nos seus bellos e importantes trabalhos sobre as funcções analyticas. O presente capitulo é destinado a estudar por este methodo os theoremas de Taylor e de Laurent. Para isso principiaremos por recordar algumas propriedades das séries da fórma (1), de que teremos de fazer uso.

45. *A área que representa os valores de* x *para os quaes é convergente a série* (1) *é limitada por uma circumferencia, cujo centro é o ponto que representa* a, *e esta série é absolutamente convergente no interior da circumferencia considerada.*

Com effeito, seja x_1 um valor de x para o qual a série seja convergente. Os modulos

$$|a_0|, |a_1||x_1 - a|, \ldots, |a_n||x_1 - a|^n, \ldots$$

devem ser todos inferiores a um numero B, visto que $|a_n||x_1 - a|^n$ tende para zero quando n tende para ∞; e portanto temos, qualquer que seja n,

$$|a_n||x_1 - a|^n < B,$$

o que dá

$$|a_n||x - a|^n < B\left|\frac{x - a}{x_1 - a}\right|^n.$$

Suppondo que os valores que se dão a x satisfazem á condição

$$|x - a| < |x_1 - a|,$$

vê-se que os termos da série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} |a_n||x - a|^n$$

são inferiores aos termos correspondentes da progressão convergente

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} B\left|\frac{x - a}{x_1 - a}\right|^n;$$

logo, para os valores de x considerados, a primeira série é convergente e a série (1) é portanto absolutamente convergente.

Como os valores de x que satisfazem á condição $|x - a| < |x_1 - a|$ são representados pelos pontos do interior de um circulo de raio igual a $|x_1 - a|$ com o centro no ponto correspondente a a, vê-se que, se a sé-

rie (1) for convergente no ponto x_1, é absolutamente convergente em todos os pontos do interior da circumferencia que passa por este ponto.

Fazendo agora variar x_1 obtem-se uma série de circumferencias cujos raios ou crescem indefinidamente ou téem um limite superior. No primeiro caso a série é convergente em todo o plano, o que se exprime ainda dizendo que ella é convergente n'um circulo de raio infinito. No segundo caso o limite considerado é o raio de uma circumferencia tal que a série (1) é convergente quando x representa um ponto do interior do circulo que esta circumferencia limita e é divergente quando x representa um ponto exterior. Ao circulo que vimos de considerar deu Cauchy o nome de *circulo de convergencia* da série (1). A série (1) pode ser convergente sómente no ponto $x = a$; n'este caso o raio do circulo de convergencia é nullo.

46. Consideremos agora a série

$$a_0 + a_1 (x - a) + a_2 (x - a)^2 + \ldots$$
$$+ a_{-1} (x - a)^{-1} + a_{-2} (x - a)^{-2} + \ldots$$

A série que forma a primeira linha d'esta expressão é convergente quando $|x - a| < R$, R representando o raio do circulo de convergencia d'esta série.

A série que forma a segunda linha da mesma expressão é convergente para todos os valores de x que satisfazem a condição $\left| \frac{1}{x - a} \right| < R'$, R' representando o raio do circulo de convergencia da série

$$a_{-1} y + a_{-2} y^2 + a_{-3} y^3 + \ldots,$$

e portanto quando é $|x - a| > \frac{1}{R'}$.

Logo a série considerada só é convergente quando é $R > \frac{1}{R'}$ e, n'este caso, a área que representa os valores de x, para os quaes ella é convergente, é limitada por duas circumferencias de raio R e $\frac{1}{R'}$ com o centro no ponto correspondente a a.

47. Se uma série

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$

cujos termos são funcções de uma variavel x, é convergente para todos os valores de x representados pelos pontos de uma área A, para cada valor de x o resto

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$$

tende para zero quando n tende para o infinito. A cada valor que se dê á quantidade positiva δ corresponde pois um numero n_1 tal que é $|R_n| < \delta$, quando $n > n_1$. Se este numero é o mesmo para todos os valores de x considerados, a série diz-se *uniformemente convergente na área* A.

Posto isto, temos o theorema seguinte:

Se a série

$$a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots + a_n u^n + \ldots,$$

onde u *representa uma funcção de* x, *fôr convergente quando* $|u| < R$, *esta série é uniformemente convergente na área* A *que representa os valores de* x *que tornam* $|u| < \rho$, ρ *representando qualquer numero positivo inferior a* R.

Com effeito, por ser a série proposta absolutamente convergente quando $|u| = \rho$ (n.° 45), a cada valor da quantidade positiva δ corresponde um numero n_1 tal que é

$$|a_{n+1}|\rho^{n+1} + |a_{n+2}|\rho^{n+2} + \ldots < \delta,$$

quando $n > n_1$.

Temos porém, para todos os valores de x representados pelos pontos da área A,

$$\begin{aligned} |R_n| &= |a_{n+1}u^{n+1} + a_{n+2}u^{n+2} + \ldots| \\ &\leqslant |a_{n+1}|\,|u|^{n+1} + |a_{n+2}|\,|u|^{n+2} + \ldots \\ &< |a_{n+1}|\rho^{n+1} + |a_{n+2}|\rho^{n+2} + \ldots \end{aligned}$$

Logo, para todos os pontos da área A, temos $|R_n| < \delta$ quando $n > n_1$, o que mostra que a série proposta é uniformemente convergente na área A.

48. *Se a série*

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n x^n$$

fôr convergente n'um annel circular dado e se, em todos pontos do interior d'este annel que têem o mesmo módulo ρ, *o módulo de* $F(x)$ *fôr menor do que uma quantidade positiva* L, *o módulo de cada termo da série será tambem menor do que* L.

Con effeito, multiplicando a série proposta por x^{-m}, vem

$$x^{-m} F(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=m-1} a_n x^{n-m} + a_m + \sum_{n=m+1}^{n=\infty} a_n x^{n-m}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{n=m-1} a_n x^{n-m} + a_m + \sum_{n=m+1}^{n=k} a_n x^{n-m} + R,$$

R representando uma quantidade que tende para zero quando k tende para o infinito.

Mas, como por hypothese é

$$|x^{-m} F(x)| < L\rho^{-m},$$

e como, por mais pequeno que seja o valor que se atribua a uma quantidade positiva δ, existe sempre um valôr k_1 tal que é $|R| < \delta$, quando $k > k_1$, temos

$$|x^{-m} F(x) - R| < L\rho^{-m} + \delta,$$

ou

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{n=m-1} a_n x^{n-m} + a_m + \sum_{n=m+1}^{n=k} a_n x^{n-m} \right| < L\rho^{-m} + \delta.$$

Dando agora n'esta desigualdade a x os valores

$$x = \rho, \rho e^{i\theta}, \rho e^{2i\theta}, \ldots, \rho e^{(a-1)i\theta}$$

e a k um valor maior do que os differentes valôres de k_1 correspondentes a estes valores de x, temos as desigualdades

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{n=m-1} a_n \rho^{n-m} + a_m + \sum_{n=m+1}^{n=k} a_n \rho^{n-m} \right| < L\rho^{-m} + \delta,$$

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{n=m-1} a_n \rho^{n-m} e^{(n-m)i\theta} + a_m + \sum_{n=m+1}^{n=k} a_n \rho^{n-m} e^{(n-m)i\theta} \right| < L\rho^{-m} + \delta,$$

. . . . . .

que dão, sommando-as e attendendo a que o modulo de uma somma de quantidades não pode exceder a somma dos modulos das parcellas,

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{n=m-1} a_n \rho^{n-m} \left(1 + e^{(n-m)i\theta} + \ldots + e^{(a-1)(n-m)i\theta}\right) \right.$$

$$+ \sum_{n=m+1}^{n=k} a_n \rho^{n-m} \left(1 + e^{(n-m)i\theta} + \ldots + e^{(a-1)(n-m)i\theta}\right)$$

$$\left. + a a_m \right| < a\,(L\rho^{-m} + \delta),$$

ou, pondo

$$1 + e^{(n-m)i\theta} + \ldots + e^{(a-1)(n-m)i\theta} = \frac{1 - e^{a(n-m)i\theta}}{1 - e^{(n-m)i\theta}} = A$$

e dando á quantidade θ um valor que não seja raiz da equação

$$1 - e^{(n-m)i\theta} = 0,$$

isto é, um valor tal que A seja finito.

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{n=m-1} a_n A \rho^{n-m} + a a_m + \sum_{n=m+1}^{n=k} a_n A \rho^{n-m} \right| < a\,(L\rho^{-m} + \delta),$$

ou

$$\left| a_m + \frac{B}{a} \right| < L\rho^{-m} + \delta,$$

representando por B a parte do primeiro membro da desigualdade precedente independente de a_m. D'esta desigualdade tira-se

$$(a) \qquad |\, a_m \,| \leqq L\rho^{-m} + \delta,$$

porque se fosse

$$|\, a_m \,| > L\rho^{-m} + \delta,$$

podia dar-se a a um valor tão grande que fosse

$$|\, a_m \,| - \frac{|\, B \,|}{a} > L\rho^{-m} + \delta,$$

ou *à fortiori*

$$\left| a_m + \frac{B}{a} \right| > L\rho^{-m} + \delta,$$

visto ser

$$\frac{|\, B \,|}{a} + \left| a_m + \frac{B}{a} \right| \geqq |\, a_m \,|.$$

Da desigualdade (a) tira-se o theorema enunciado; porque, se fosse $|\, a_m \,| > L\rho^{-m}$, podia dar-se a δ um valor tão pequeno que fosse

$$|\, a_m \,| > L\rho^{-m} + \delta.$$

O theorema que vimos de demonstrar é devido a Cauchy. Aqui serve como lemma para a demonstração do theorema seguinte.

49. *Se uma funcção* $\mathrm{f}(x)$ *fôr susceptivel de ser desenvolvida na série uniformemente convergente dentro de um annel, comprehendido entre duas circumferencias de raio* R *e* R′ *com o centro na origem das coordenadas:*

$$(1) \qquad f(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots,$$

e se as funcções $\mathrm{f}_0(x), \mathrm{f}_1(x), \ldots$ *forem susceptiveis de ser desenvolvidas em*

séries ordenadas segundo as potencias inteiras de x. convergentes dentro do mesmo annel:

$$(2)\quad \begin{cases} f_n(x) = A_0^{(n)} + A_1^{(n)} x + A_2^{(n)} x^2 + \ldots + A_m^{(n)} x^m + \ldots \\ \qquad + A_{-1}^{(n)} x^{-1} + A_{-2}^{(n)} x^{-2} + \ldots + A_{-m}^{(n)} x^{-m} + \ldots, \end{cases}$$

a funcção f (x) *será tambem susceptivel de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de x:*

$$(3)\quad \begin{cases} f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m + \ldots \\ \qquad + A_{-1} x^{-1} + A_{-2} x^{-2} + \ldots + A_{-m} x^{-m} + \ldots \end{cases}$$

e será

$$(4)\quad \begin{cases} A_m = A_m^{(0)} + A_m^{(1)} + \ldots + A_m^{(n)} + \ldots \\ A_{-m} = A_{-m}^{(0)} + A_{-m}^{(1)} + \ldots + A_{-m}^{(n)} + \ldots \end{cases}$$

Este theorema representa um papel importante na theoria das funcções analyticas. E' devido a Weierstrass, assim como a demonstração que vamos dar d'elle (1).

Seja ϱ uma quantidade positiva tal que $R' < \varrho < R$; por ser uniformemente convergente a série (1) na circumferencia de raio ϱ, a cada valôr da quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, corresponderá um numero n_1 tal que as desigualdades

$$| f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots | < \frac{1}{2}\delta,$$

$$| f_{n-p+1}(x) + f_{n-p+2}(x) + \ldots | < \frac{1}{2}\delta$$

serão satisfeitas por todos os valôres de n superiores a n_1 e por todos os valores de x que téem o módulo ϱ, qualquer que seja p; logo a desigualdade

$$| f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x) | < \delta$$

será satisfeita pelos mesmos valores de n e x.

---

(1) *Monatsbericht der Kön. Akademie de Wissenschaften zu Berlin* (1880).

Mas temos, sommando os desenvolvimentos de $f_{n+1}(x), \ldots, f_{n+p}(x)$,

$$f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(A_m^{(n+1)} + \ldots + A_m^{(n+p)}\right) x^m.$$

Logo, em virtude do theorema demonstrado no n.º precedente, temos a desigualdade

$$\left| A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \ldots + A_m^{(n+p)} \right| < \delta \rho^{-m}, \ (n > n_1)$$

da qual se conclue a convergencia das séries (4), applicando para isso o criterio fundamental de convergencia e divergencia que se deve a Cauchy.

Considerando agora outro numero positivo ρ_1 tal que seja $R > \rho_1 > R'$, podemos dar a n_1 um valor tal que seja tambem

$$\left| A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \ldots + A_m^{(n+p)} \right| < \delta \rho_1^{-m},$$

quando $n > n_1$, por maior que seja p; e portanto

$$\left| \lim_{p=\infty} \left(A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \ldots + A_m^{(n+p)}\right) \right| \leqq \delta \rho_1^{-m}.$$

Pondo para brevidade

$$A_m^{(0)} + A_m^{(1)} + \ldots + A_m^{(n)} = A'_m,$$
$$\lim_{p=\infty} \left(A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \ldots + A_m^{(n+p)}\right) = A''_m,$$

o que dá

$$A_m = A'_m + A''_m, \quad |A''_m| \leqq \delta \rho_1^{-m}$$

vem, para os valores de x cujo módulo ρ é inferior a ρ_1, a desigualdade

$$|A''_0| + |A''_1 x| + \ldots + |A''_m x^m| + \ldots$$
$$< \delta \left[1 + \frac{\rho}{\rho_1} + \ldots + \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^m + \ldots\right] < \delta \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho},$$

da qual se conclue que a série

$$A''_0 + A''_1 x + \ldots + A''_m x^m + \ldots$$

é absolutamente convergente.

Considerando outro numero ρ_2 tal que seja $\rho > \rho_2 > R'$, vê-se do mesmo módo que temos a desigualdade

$$| A''_{-1} x^{-1} | + | A''_{-2} x^{-2} | + \ldots + | A''_{-m} x^{-m} | + \ldots < \delta \frac{\rho}{\rho - \rho_2},$$

da qual se conclue que a série

$$A_{-1} x^{-1} + A_{-2} x^{-2} + \ldots + A_{-m} x^{-m} + \ldots$$

é tambem absolutamente convergente.

Temos depois

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m x^m = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} (A'_m + A''_m) x^m = \sum_{m=0}^{m=n} f_m(x) + \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A''_m x^m,$$

d'onde se tira

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} f_m(x) - \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m x^m = \sum_{m=n+1}^{m=\infty} f_m(x) - \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A''_m x^m,$$

e portanto

$$\left| \sum_{m=0}^{m=\infty} f_m(x) - \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m x^m \right| < \delta + \delta \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho} + \delta \frac{\rho}{\rho - \rho_2}.$$

Como a δ se pode dar um valor tão pequeno quanto se queira, tira-se d'esta desigualdade

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} f_m(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m x^m,$$

isto é a igualdade (3), que se queria demonstrar, e vê-se que esta igualdade

tem logar para todos os valores de x cujo módulo está comprehendido entre ρ_1 e ρ_2. Como ρ_1 e ρ_2 são tão proximos de R e R' quanto se queira, vê-se que a igualdade anterior tem logar para todos os valores de x representados pelos pontos do annel limitado pelas circunferencias de raio R e R' e com o centro na origem das coordenadas.

No que precede pode ser $R' = 0$, e então o annel circular, que vimos de considerar, reduz-se a um circulo de raio igual a R. N'este caso os desenvolvimentos (2) e (3) não contéem potencias negativas de x.

50. Antes de entrar no assumpto que forma o objecto principal d'este capitulo, demonstraremos finalmente as proposições seguintes:

1.° *A somma e o producto de funcções regulares, na vesinhança do ponto a, são regulares na vesinhança do mesmo ponto.*

Com effeito, se as funcções $f(x)$ é $F(x)$ são regulares na vesinhança do ponto a, temos, para valores sufficientemente pequenos de $|x-a|$,

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots,$$
$$F(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots;$$

e d'estas igualdades tiram-se, em virtude de theoremas bem conhecidos relativos ás operações sobre séries, as igualdades seguintes:

$$f(x) + F(x) = a_0 \pm b_0 + (a_1 \pm b_1)(x-a) + (a_2 \pm b_2)(x-a)^2 + \ldots$$
$$f(x)F(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)(x-a) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)(x-a)^2 + \ldots$$

que téem logar para os mesmos valores de $|x-a|$.

2.° *A funcção* $[f(x)]^k$ *é tambem regular na vesinhança do ponto a, qualquer que seja o valor de* $f(a)$, *no caso de* k *ser inteiro e positivo, e quando* $f(a)$ *é differente de zero, nos outros casos.*

O caso de k representar um numero inteiro positivo já foi considerado, visto que n'este caso $[f(x)]^k$ representa um producto de factores.

Nos outros casos temos, suppondo $a_0 = f(a)$ differente de zero,

$$[f(x)]^k = a_0^k \left[1 + \frac{a_1}{a_0}(x-a) + \frac{a_2}{a_0}(x-a)^2 + \ldots\right]^k$$
$$= a_0^k [1 + P(x-a)]^k,$$

representando por $P(x-a)$ o desenvolvimento

$$P(x-a) = (x-a)\left[\frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0}(x-a) + \ldots\right].$$

Dando a $|x-a|$ valores tão pequenos que seja

$$|P(x-a)| < 1,$$

podemos desenvolver $[f(x)]^k$ em série ordenada segundo as potencias $x-a$ por meio da formula de Newton (n.º 25), e teremos

$$[f(x)]^k = a_0\left[1 + kP(x-a) + \frac{k(k-1)}{1\,.\,2}P(x-a)^2 + \ldots\right].$$

Esta série é uniformemente convergente na vesinhança do ponto a (n.º 47), assim como os desenvolvimentos de $P(x-a)$, $[P(x-a)]^2, \ldots$; logo a funcção $[f(x)]^k$ é susceptivel de ser desenvolvida (n.º 49) em série ordenada segundo as potencias de $x-a$, na vesinhança do ponto a.

3.º *O quociente* $\frac{\mathrm{F(x)}}{\mathrm{f(x)}}$ *é regular na vesinhança do ponto* a, *se* f(a) *fôr differente de zero.*

Este principio é uma consequencia dos dous anteriores, visto que podemos escrever a expressão considerada debaixo da fórma $F(x)[f(x)]^{-1}$.

4.º *Se* F(y) *fôr regular na vesinhança do ponto* y = b *e se* y = f(x) *fôr regular na vesinhança do ponto* a, *a que corresponde* y = b, F[f(x)] *é regular na vesinhança do ponto* a.

Temos, por hypothese,

$$F(y) = b_0 + b_1(y-b) + b_2(y-b)^2 + \ldots,$$
$$y - b = a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots$$

Substituindo na primeira série $y-b$ pelo seu desenvolvimento e ordenando o resultado segundo as potencias de $(x-a)$ vem (n.º 49) um re-

sultado da fórma

$$A_0 + A_1 (x - a) + A_2 (x - a)^2 + \ldots,$$

o que demonstra o theorema enunciado.

31. Postas estas proposições relativas ás séries inteiras, vamos agora deduzir a *série de Taylor* e demonstrar o *theorema de Cauchy* relativo ao raio de convergencia d'esta série.

Se a série

$$(1) \quad f(x) = a_0 + a_1 (x - a) + a_2 (x - a)^2 + \ldots + a_n (x - a)^n + \ldots$$

fôr convergente no interior de uma circumferencia de centro a *e raio* R, *isto é quando* $|x - a| < R$, *e se* x_0 *representar um ponto do interior d'esta circumferencia, a funcção* f(x) *admitte uma derivada finita no ponto* x_0 *e esta derivada é dada pela série*

$$f'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x_0 - a)^{n-1},$$

cujos termos se formam derivando os termos da série proposta.

Em segundo logar temos

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^n (x_0) + \ldots$$

e este desenvolrimento tem logar para todos os ralores de x *que satisfazem á condição*

$$| x_0 - a | + | x - x_0 | < R,$$

isto é, para todos os ralores de x *representados pelos pontos de um circulo de centro* x_0 *contido no interior da circumferencia de raio* R.

Com effeito, pondo na séric proposta $x = x_0 + h$, temos

$$f(x_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 + h - a)^n.$$

Esta série, considerada como funcção de h, é uniformemente convergente quando $|x_0+h-a|<R$, ou *à fortiori* quando é $|x_0-a|+|h|<R$. Desenvolvendo pois os binomios que n'ella entram e ordenando o resultado segundo as potencias de h, temos (n.° 49)

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf_1(x_0)+h^2f_2(x_0)+\ldots$$

onde é

$$f_1(x_0)=\sum_{n=1}^{x} na_n(x_0-a)^n,$$

$$f_2(x_0)=\sum_{n=1}^{x} n(n-1)a_n(x_0-a)^{n-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pondo agora $h=x-x_0$, vem

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f_1(x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^2f_2(x_0)+\ldots$$

com a condição $|x_0-a|+|x-x_0|<R$.

Para d'estas formulas tirar o theorema enunciado, basta notar que a ultima dá, passando $f(x_0)$ para o primeiro membro, dividindo depois os dous membros por $x-x_0$ e fazendo finalmente tender $x-x_0$ para zero, $f_1(x_0)=f'(x_0)$. Basta em seguida notar que cada uma das funcções

$$f_2(x_0),\ f_3(x_0),\ldots$$

se deduz da anterior como $f'(x_0)$ se deduz de $f(x_0)$, para vêr que é

$$f_2(x_0)=f''(x_0),\ f_3(x_0)=f'''(x_0),\ldots$$

52. *Se a funcção* f (x) *fôr regular no interior de uma circumferencia de centro* a, *o desenvolvimento*

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{1}{2}(x-a)^2f''(a)+\ldots$$

tem logar para todos os valores de x *representados pelos pontos do interior d'esta circumferencia.*

Esta proposição coincide com o theorema de Cauchy, demonstrado no n.° 30, e pode ser demonstrada do módo seguinte. (Fig. 10.)

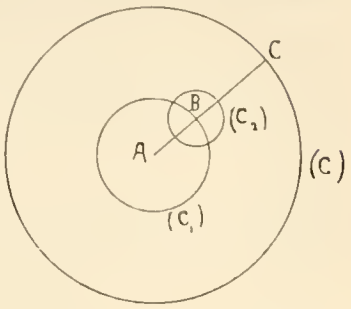


Fig. 10.

Seja (c) a circumferencia considerada. Por ser regular a funcção $f(x)$ na vesinhança do ponto a (ao qual corresponde o centro A da circumferencia) existe uma circumferencia (c_1), de raio ρ_1, tal que é, em toda a área que ella limita,

$$(1) \qquad f(x) = f(a) + (x - a) f'(a) + \frac{1}{2} (x - a)^2 f''(a) + \ldots$$

Por ser tambem regular a mesma funcção na vesinhança do valor b de x, correspondente ao ponto B interior a (c_1), existe uma circumferencia (c_2), de centro B e raio ρ_2, tal que é, em toda a área que ella limita, x' representando um ponto qualquer d'esta área,

$$f(x') = f(b) + (x' - b) f'(b) + \frac{1}{2} (x' - b)^2 f''(b) + \ldots$$

Representando porém por L o maximo valôr de $| f(x') |$ na circumferencia de raio igual a $| x' - b |$ e centro b, temos, applicando o theorema demonstrado no n.° 48,

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots m} \left| f^m(b) \right| | x' - b |^m < L.$$

Notando que é

$$f^m(b) = \Sigma \frac{n (n-1) \ldots (n - m + 1)}{1 \cdot 2 \ldots n} (b - a)^{n-m} f^n(a),$$

e applicando outra vez o theorema do n.° 48 á funcção

$$\Sigma \frac{n (n-1) \ldots (n - m + 1)}{1 \cdot 2 \ldots n \times 1 \cdot 2 \ldots m} (b - a)^{n-m} (x' - b)^m f^n(a),$$

cujo módulo é inferior a L, vem

$$\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1\,.\,2\dots n \times 1\,.\,2\dots m} \mid b-a \mid^{n-m} \mid x'-b \mid^{m} \mid f^n(a) \mid < L,$$

ou

$$\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1\,.\,2\dots n \times 1\,.\,2\dots m} \mid b-a \mid^{n} \left| \frac{x'-b}{\rho_1} \right|^{m} \mid f^n(a) \mid < L \left| \frac{b-a}{\rho_1} \right|^{m};$$

e portanto, sommando todas as desigualdades correspondentes aos valôres

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots, n,$$

$$\frac{\mid f^n(a) \mid \mid b-a \mid^n}{1\,.\,2\dots n} \left(1 + \left| \frac{x'-b}{\rho_1} \right| \right)^n < L \sum_{m=0}^{m=n} \left| \frac{b-a}{\rho_1} \right|^m,$$

ou

$$\frac{\mid f^n(a) \mid \mid b-a \mid^n}{1\,.\,2\dots n} \left(1 + \left| \frac{x'-b}{\rho_1} \right| \right)^n < L \frac{\rho_1}{\rho_1 - \mid b-a \mid},$$

ou

$$\frac{\mid f^n(a) \mid \mid x-a \mid^n}{1\,.\,2\dots n} < L \frac{\rho_1}{\rho_1 - \mid b-a \mid} \left| \frac{x-a}{\mid b-a \mid \left(1 + \left| \frac{x'-b}{\rho_1} \right| \right)} \right|^n.$$

Esta desigualdade mostra que a série (1) é convergente quando é

$$x-a \mid < \mid b-a \mid \left(1 + \left| \frac{x'-b}{\rho_1} \right| \right),$$

e basta attender a que $\mid b-a \mid$ e $\mid x'-b \mid$ differem de ρ_1 e ρ_2 tão pouco quanto se queira, para concluir d'ella que aquella série é convergente no interior da circumferencia de raio igual a $\rho_1 + \rho_2$.

Considerando uma circumferencia de raio ρ_3 com o centro no interior de (c_2) vê-se por uma analyse semelhante que a serie (1) é convergente no interior da circumferencia de raio igual a $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3$.

Continuando do mesmo módo, obtem-se uma série $\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_4+\ldots$ cuja somma R representa o raio de convergencia da série (1).

Demonstrado assim que o segundo membro de (1) é convergente no interior da circumferencia de raio R, resta demonstrar que coincide com $f(x)$ em toda esta área.

Para isso, representemos por $\varphi(x)$ a differença entre $f(x)$ e a série que entra no segundo membro de (1), e notemos em primeiro logar que é, por hypothese, $\varphi(x)=0$ no circulo (c_1).

Tomando um ponto b n'este circulo, tão proximo quanto se queira da sua circumferencia, temos a igualdade (n.º 50 — 1.º)

$$\varphi(x)=\varphi(b)+(x-b)\,\varphi'(b)+\frac{1}{2}(x-b)^2\,\varphi''(b)+\ldots;$$

mas, por b pertencer ao circulo (c_1), é $\varphi(b)=0$, $\varphi'(b)=0,\ldots$; logo temos $\varphi(x)=0$ em todos os pontos da área d'este segundo circulo, que é em parte destincta da anterior.

Continuando do mesmo módo até considerar toda a área do circulo de raio R, vê-se que $\varphi(x)$ é nulla em toda esta área, e portanto que a igualdade (1) tem logar para todos os valores de x representados pelos pontos d'esta área.

53. A demonstração da *formula de Laurent* por meio das propriedades das séries inteiras foi dada por Mittag-Leffler nas *Memorias da Sociedade das Sciencias de Liège* (2.ª série, t. XI) e no tomo IV das *Acta mathematica*. Para expôr esta demonstração são necessarias algumas notas preleminares que vamos appresentar.

Sejam x e y duas variaveis complexas ligadas pela relação

$$(1)\qquad y=\varphi(x)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{R}\right)^n+\left(\frac{R}{x}\right)^n\right],$$

onde n representa um numero inteiro positivo e R um numero positivo. E' em primeiro logar necessario procurar qual é a área que, no plano de representação dos y, corresponde a uma área A, limitada pelas circumferencias de raio $R(1+\rho)$ e $\dfrac{R}{1+\rho}$, com os centros na origem das coordena-

das, onde são representados os valores de x. Suppomos que a quantidade φ é positiva.

Para resolver esta questão procuremos primeiramente qual é a curva descripta pelo ponto correspondente a y quando o ponto correspondente a x descreve uma circumferencia de raio igual a $R(1+\delta)$, com o centro na origem das coordenadas, δ representando uma quantidade positiva não superior a φ. Para isso basta pôr em (1)

$$y = X + iY, \quad x = R(1+\delta)(\cos\varphi + i\,\operatorname{sen}\varphi),$$

o que dá as equações

$$(2) \qquad \begin{cases} X = \dfrac{1}{2}\left[(1+\delta)^n + \dfrac{1}{(1+\delta)^n}\right]\cos n\varphi, \\ Y = \dfrac{1}{2}\left[(1+\delta)^n - \dfrac{1}{(1+\delta)^n}\right]\operatorname{sen} n\varphi, \end{cases}$$

que determinam os pontos (X, Y) da curva pedida, fazendo variar φ desde 0 até 2π, e que mostram que esta curva é uma ellipse.

A curva, cujas equações vimos de achar goza das propriedades seguintes:

1.° O seu centro coincide com a origem das coordenadas. Os seus eixos coincidem com os eixos das coordenadas e são iguaes a

$$(1+\delta)^n + \frac{1}{(1+\delta)^n}, \quad (1+\delta)^n - \frac{1}{(1+\delta)^n}.$$

2.° A distancia de cada ponto da curva á origem das coordenadas é dada pela formula

$$(3) \qquad X^2 + Y^2 = \frac{1}{4}\left[(1+\delta)^{2n} + \frac{1}{(1+\delta)^{2n}} + 2(\cos^2 n\varphi - \operatorname{sen}^2 n\varphi)\right].$$

Como a derivada de $X^2 + Y^2$ relativamente a δ é positiva, vê-se que $X^2 + Y^2$ cresce quando δ cresce. Esta circumstancia far vêr que as curvas correspondentes aos diversos valores de δ não se podem cortar e que as

curvas que correspondem a menores valores de δ estão no interior das que correspondem a maiores valores de δ.

Pondo em (2) $\delta = 0$, véem as equações

$$X = \cos n\varphi, \quad Y = 0;$$

logo quando x descreve uma circumferencia de raio R com o centro na origem das coordenadas, y descreve uma recta que une os pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, os quaes estão pois no interior de todas as curvas correspondentes aos diversos valores de δ.

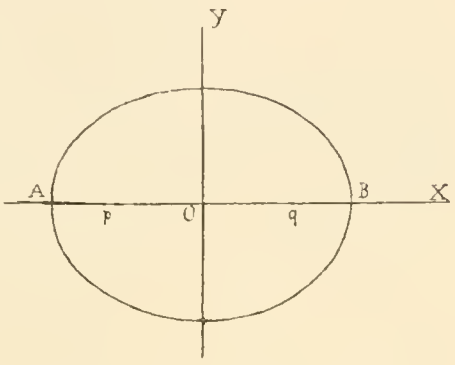


Fig. 11.

Do que precede conclue-se que, quando (fig. 11) δ varia desde 0 até φ, a curva correspondente á circumferencia de raio $R(1+\delta)$ varia desde o segmento de recta pq, que une os pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, até á curva $ACBD$, affastando-se sempre da origem das coordenadas em todas as direcções.

3.º Quando x descreve o circulo de raio $\frac{R}{1+\delta}$, y descreve ainda a curva representada pelas equações (2).

Pondo, com effeito, em (1)

$$y = X + iY, \quad x = \frac{R}{1+\delta}(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

véem as equações

$$X = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+\delta)^n} + (1+\delta)^n\right]\cos n\varphi,$$

$$Y = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+\delta)^n} - (1+\delta)^n\right]\mathrm{sen}\,n\varphi.$$

Notando que a curva representada por estas equações não se altera

quando se muda φ em $-\varphi$, vê-se que coincide com a curva representada pelas equações (2).

4.° Por cada ponto do plano de representação dos y passa uma das curvas dadas pelas equações (2).

Com effeito, a equação (1) dá para x, quando y é dado, $2n$ valores:

$$x = R\sqrt{y \pm \sqrt{y^2 - 1}}.$$

Seja x' um d'estes valores. Quando x descreve uma circumferencia de raio $|x'|$ com o centro na origem das coordenadas, y descreve uma das curvas representadas pelas equações (2), que passa pelo ponto correspondente ao valor dado a y. Os outros valores de x devem ter todos módulos iguaes a $|x'|$, visto que por cada ponto não pode passar mais do que uma das curvas representadas pelas equações (2).

5.° A maior e a menor distancia dos pontos da curva representada pelas equações (2) á origem das coordenadas podem ser obtidas procurando os valores de φ que tornam a expressão de $X^2 + Y^2$, dada pela formula (3), maxima ou minima; o que dá para valôr da distancia maxima

$$\frac{1}{2}\left[(1+\delta)^n + \frac{1}{(1+\delta)^n}\right]$$

e para valor da distancia minima

$$\frac{1}{2}\left[(1+\delta)^n - \frac{1}{(1+\delta)^n}\right].$$

Reflectindo um pouco sobre as propriedades que vimos de indicar podemos concluir que *ao annel circular* A *comprehendido entre as circumferencias de raio* $R(1+\rho)$ *e* $\frac{R}{1+\rho}$, *com o centro na origem das coordenadas, corresponde no plano de representação dos* y *uma superficie* B *limitada por uma curva fechada composta de um só ramo e tendo no interior os pontos* $y = 0$ e $y = \pm 1$.

54. A demonstração, dada por Mittag-Leffler, do theorema de Lau-

rent funda-se ainda n'um lemma demonstrado por Weierstrass na sua bella e importante memoria sobre a theoria das funcções inteiras (1), que vamos estabelecer.

Seja $f(x)$ uma funcção de x monogenea, uniforme e regular na área A, limitada pelas circumferencias de raio $R(1+\rho)$ e $\frac{R}{1+\rho}$, com o centro na origem das coordenadas.

Pondo ainda

$$y = \varphi(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{R}\right)^n + \left(\frac{R}{x}\right)^n\right],$$

a cada valor de y correspondem $2n$ valores $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ para x, e entre estes valores só existem alguns iguaes quando é $y = \pm 1$. Por meio d'estes valores podemos formar $2n$ funcções $F_0, F_1, \ldots, F_{2n-1}$ de y taes que a igualdade

$$\sum_{v=0}^{v=2n-1} F_v x^v = f(x) \tag{5}$$

seja satisfeita quando a x se dão os valores $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$. Para isso basta notar que, em virtude da formula de interpolação de Lagrange, temos, quando as raizes $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ são todas differentes, isto é, quando y é differente de $+1$ e -1,

$$f(x) = \sum_{v=1}^{v=2n} \frac{f(x_v)}{\Pi'(x_v)} \cdot \frac{\Pi(x)}{x - x_v}, \quad (x = x_1, \ldots, x_{2n})$$

onde

$$\Pi(x) = (x - x_1)\ldots(x - x_{2n}) = x^{2n} - 2yR^n x^n + R^{2n},$$

e que temos tambem

$$\frac{\Pi(x)}{x - x_v} = x^{2n-1} + x_v x^{2n-2} + \ldots + x_v^{2n-1} - 2yR^n x_v^{n-1}.$$

---

(1) *Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1876. Uma traducção franceza d'esta memoria foi publicada nos *Annales de l'École Normale Superieure de Paris* (2.ª s., t. VIII).

Logo, para ser satisfeita a igualdade (5) pelos valores $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ que correspondem a valores de y differentes de ± 1, basta pôr

$$F_{2n-1} = \sum_{v=1}^{v=2n} \frac{f(x_v)}{\Pi'(x_v)},$$

$$F_{2n-2} = \sum_{v=1}^{v=2n} \frac{x_v f(x_v)}{\Pi'(x_v)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F_0 = \sum_{v=1}^{v=2n} \frac{x_v^{2n-1} f(x_v)}{\Pi'(x_v)} - 2yR^n \sum_{v=1}^{v=2n} \frac{x_v^{n-1} f(x_v)}{\Pi'(x_v)},$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ são os valores de x dados pela igualdade

$$x = R \sqrt[n]{y \pm \sqrt{y^2 - 1}},$$

e onde é

$$\Pi'(x_v) = 2n x_v^{n-1} (x_v^n - yR^n).$$

Posto isto, vamos agora mostrar que as funcções de y representadas por $F_0, F_1, \ldots, F_{2n-1}$ são todas regulares na área B.

Seja b um dos valores dados a y, representado por um dos pontos da área B, e supponhamos em primeiro logar que b é differente de ± 1.

Escrevendo a relação entre x e y debaixo da forma

$$x = R \sqrt[n]{(y-b) + b \pm \sqrt{(y-b)^2 + 2b(y-b) + b^2 - 1}}$$

e applicando os theoremas demonstrados no n.º 50, vê-se em primeiro logar que o radical

$$\sqrt{(y-b)^2 + 2b(y-b) + b^2 - 1}$$

é regular na vesinhança do ponto b, e em seguida que as quantidades x_v são regulares na vesinhança do mesmo ponto.

A funcção $f(x_v)$ é tambem regular (n.º 50—4.º) na vesinhança do ponto considerado.

Basta agora attender a que as expressões de $F_0, F_1, \ldots, F_{2n-1}$ são compostas de sommas, productos e quocientes de funcções regulares na vesinhança do ponto b e que $H'(x_v)$ só é nullo quando $b = \pm 1$, para concluir que estas funcções são regulares (n.º 50) na vesinhança do ponto b considerado.

Supponhamos agora que é $b = 1$. As expressões de $F_0, F_1, \ldots, F_{2n-1}$ são compostas de parcellas da fórma

$$\frac{1}{2}(x_v) = \frac{x_v^{\,k} f(x_v)}{2n(x_v^{\,n} - yR^n)}.$$

Temos primeiramente, na vesinhança do ponto $y = 1$,

$$\sqrt{y^2 - 1} = (y-1)^{\frac{1}{2}}\left[1 + \frac{1}{2}(y-1) + \ldots\right] = (y-1)^{\frac{1}{2}} P(y-1),$$

$P(y-1)$ representando um desenvolvimento ordenado segundo as potencias inteiras e positivas de $y - 1$.

Temos depois, na vesinhança do mesmo ponto,

$$x = R\left[y - 1 + 1 \pm (y-1)^{\frac{1}{2}} P(y-1)\right]^{\frac{1}{n}},$$

e, pondo $(y-1)^{\frac{1}{2}} = t$ e representando por A_m o coefficiente do termo de ordem $m+1$ no desenvolvimento d'este binomio,

$$x = R\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left(t^2 \pm t P(t^2)\right)^m\right].$$

O segundo membro d'esta igualdade pode ser desenvolvido segundo as potencias de t (n.º 49), e temos portanto um resultado da fórma

$$x = \sum_{m=0}^{m=\infty} B_{2m} t^{2m} \pm \sum_{m=0}^{m=\infty} B_{2m+1} t^{2m+1}.$$

Em virtude d'esta igualdade e dos theoremas demonstrados no n.° 50, vê-se que $\psi(x_v)$ é da fórma

$$\psi(x_v) = \sum_{m=0}^{m=\infty} C_{2m}\, t^{2m} \pm \sum_{m=0}^{m=\infty} C_{2m+1}\, t^{2m+1},$$

ou

$$\psi(x_v) = \sum_{m=0}^{m=\infty} C_{2m}\,(y-1)^m \pm (y-1)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{m=\infty} C_{2m+1}\,(y-1)^m.$$

Basta agora attender a que cada um dos signaes que affectam a segunda das séries, que entram n'esta formula, corresponde a sua raiz da equação $\varphi(x) - y = 0$, para concluir que os termos dependentes de $(y-1)^{\frac{1}{2}}$ devem desapparecer na somma $\sum_{v=1}^{v=2n} \psi(x_v)$ e que deve ser

$$\sum_{v=1}^{v=2n} \psi(x_v) = \sum_{m=0}^{m=\infty} D_m\,(y-1)^m.$$

Vê-se pois que as expressões de $F_0, F_1, \ldots, F_{2n-1}$ são ainda regulares na vesinhança do ponto $y = 1$.

Do mesmo modo se mostra que estas expressões são regulares na vesinhança do ponto $y = -1$.

As funcções $F_0, F_1, \ldots, F_{2n-1}$ foram determinadas de modo que, para cada valor dado a y, os valores correspondentes de x, dados pela equação (1), satisfaçam á equação (5). Pondo pois $y = \varphi(x)$ n'esta equação, temos o theorema seguinte:

A igualdade

$$f(x) = \sum_{v=0}^{v=2n-1} F_v\,[\varphi(x)]\, x^v$$

é satisfeita por todos os valores de x *representados pelos pontos da área* A. *As funcções de* y *representadas por* $F_0, F_1, \ldots$, *que entram n'esta igualdade, são regulares na área* B.

Deve-se observar que, para estabelecer esta igualdade, excluiram-se os

valores de x correspondentes a $y = 1$ e a $y = -1$. Basta porèm attender a que os seus dous membros admittem (n.° 51) derivadas finitas n'estes pontos, e a que portanto são continuas, para concluir que ella ainda tem logar para estes valores de x.

55. Fundado nas proposições que vimos de demonstrar nos dois numeros anteriores, obteve Mittag-Leffler o theorema de Laurent do módo seguinte.

Supponhamos que $f(x)$ representa uma funcção monogenea, uniforme e regular na área limitada por duas circumferencias de raio R' e R'' e seja R um numero comprehendido entre R' e R''.

Representando por h uma quantidade positiva arbitraria, podemos dar a ρ um valôr tão pequeno e depois a n um valôr tão grande que seja

$$R(1+\rho) < R'', \quad \frac{R}{1+\rho} > R',$$

$$\frac{1}{2}\left[(1+\rho)^n - \frac{1}{(1+\rho)^n}\right] > 1+h.$$

Vin-se no n.° anterior que as funcções $F_0(y), F_1(y), \ldots, F_{2n-1}(y)$ são regulares na área B, correspondente aos valores de x representados pelos pontos do annel comprehendido entre as circumferencias de raio $R(1+\rho)$ e $\frac{R}{1+\rho}$, com os centros na origem das coordenadas. Como porém o primeiro membro da ultima desigualdade representa o minimo valor da distancia dos pontos da curva, que limita B, á origem das coordenadas, vê-se que esta área contem no interior o circulo de raio $1+h$. Logo temos, para os valores de y representados pelos pontos d'este circulo (n.° 52),

$$F_r(y) = A_0^{(r)} + A_1^{(r)} y + A_2^{(r)} y^2 + \ldots$$

Por outra parte, dando a ε um valôr positivo sufficientemente pequeno para que seja

$$\frac{1}{2}\left[(1+\varepsilon)^n + \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}\right] < 1+h,$$

e notando que o primeiro membro d'esta desigualdade representa o maximo valôr da distancia da origem das coordenadas aos pontos da curva que limita a área B_1, correspondente ao annel A_1, limitado pelas circumferencias de raio $R(1+\varepsilon)$ e $\frac{R}{1+\varepsilon}$, com o centro na origem das coordenadas, vê-se que os modulos das quantidades representadas pelos pontos da área B_1 são menores do que $1+h$.

A série

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} A_\mu^{(v)} y^\mu = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} A_\mu^{(v)} \left[\left(\frac{x}{R}\right)^n + \left(\frac{R}{x}\right)^n \right]^\mu$$

é portanto (n.° 47) uniformemente convergente na área A_1, e temos, para os valores de x representados pelos pontos d'esta área (n.° 49),

$$F_v(y) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} a_m x^m.$$

Sommando agora todos os desenvolvimentos d'esta fórma que correspondem aos diversos termos da somma

$$f(x) = \sum_{v=0}^{v=2n-1} F_v(y)\, x^v$$

obtem-se um resultado da fórma

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m x^m, \tag{6}$$

que tem logar para todos os valores de x representados pelos pontos da área A_1. Basta agora fazer variar R desde R' até R'' para concluir que *a formula* (6) *tem logar para todos os valores de* x *representados pelos pontos da área limitada pelas circumferencias de raio* R' *e* R'', *com o centro na origem das coordenadas.*

A formula (6) é a *formula de Laurent*, que pretendiamos obter.

Applicando a formula (6) á funcção $f(x+a)$ e mudando no resultado x em $x-a$, obtem-se o desenvolvimento

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m (x-a)^m,$$

que tem logar para todos os valores de x representados pelos pontos do annel comprehendido entre as circumferencias de raio R' e R'', com o centro no ponto correspondente a a.

56. O methodo que vimos de dar não é proprio para o calculo dos coefficientes do desenvolvimento. Estabelecida porém a possibilidade do desenvolvimento, é facil obter a expressão, por meio de integraes definidos, dos coefficientes.

Multiplicando, com effeito, os dous membros da igualdade anterior por $(x-a)^{-n}$, obtem-se um resultado da fórma

$$(x-a)^{-n} f(x) = A_n + \Sigma A_m (x-a)^m,$$

onde m é differente de n. Pondo agora $x-a = Re^{i\theta}$, R representando uma quantidade qualquer comprehendida entre R' e R'', e integrando os dous membros da igualdade entre os limites 0 e 2π, vem a formula

$$A_n = \frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{i\theta})\, e^{-ni\theta} d\theta,$$

já obtida no n.º 32.

CAPITULO VI

SÉRIE DE BURMANN. SÉRIE DE LAGRANGE. GENERALIZAÇÃO DA SÉRIE DE BURMANN

57. Passemos agora a tratar do desenvolvimento de $f(x)$ em série ordenada segundo as potencias inteiras e positivas de uma funcção dada $\theta(x)$, isto é, em série da fórma

$$A_0 + A_1 \theta(x) + A_2 \theta^2(x) + \ldots + A_n \theta^n(x) + \ldots,$$

procurando as condições para que este desenvolvimento tenha logar e o valôr dos coefficientes $A_0, A_1, A_2, \ldots$

Supponhamos que as funcções $f(z)$ e $\theta(z)$ são synecticas na área A limitada por um unico contôrno fechado S, que $\theta(z)$ admitte um unico zero no interior d'este contôrno e que, designando por x um valôr representado por um ponto do interior da área A e por a o valôr que torna nulla esta funcção e pondo $\theta(z) = (z - a)\,\Theta(z)$, a desigualdade

$$|\theta(x)| < |\theta(z)|$$

ou

$$|x - a|\,|\Theta(x)| < |z - a|\,|\Theta(z)|$$

é satisfeita por todos os valores de z que correspondem aos pontos do contôrno S.

N'este caso a equação

$$\varphi(z) - \varphi(x) = 0$$

tem uma unica raiz $z = x$ no interior do contôrno S. Com effeito, o numero d'estas raizes é dado pelo integral (n.º 31)

$$u = \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{\varphi'(z)\,dz}{\varphi(z) - \varphi(x)},$$

ou, desenvolvendo-o em série,

$$u = \frac{1}{2i\pi}\left[\int_S \frac{\varphi'(z)\,dz}{\varphi(z)} + \varphi(x)\int_S \frac{\varphi'(z)\,dz}{\varphi^2(z)} + \ldots\right];$$

mas o primeiro termo d'esta série é igual á unidade, visto representar as raizes da equação $\varphi(z) = 0$ comprehendidas na área A, e os outros são nullos, por ser, pondo $z = \rho e^{i\omega}$,

$$\int_S \frac{\varphi'(z)\,dz}{\varphi^n(z)} = -\left[\frac{1}{(n-1)\,\varphi^{n-1}(z)}\right]_0^{2\pi} = 0;$$

logo é $u = 1$.

Posto isto, consideremos o integral

$$U = \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f(z)\,\varphi'(z)\,dz}{\varphi(z) - \varphi(x)}.$$

Como o denominador da funcção integrada é nullo quando $z = x$ e este zero é o unico que este denominador tem na área A, temos (n.º 28 — 1.º),

representando por C uma circumferencia cujo centro seja o ponto x e cujo raio seja igual ao raio do circulo de convergencia da série

$$\theta(z) - \theta(x) = (z-x)\,\theta'(x) + \frac{1}{2}(z-x)\,\theta''(x) + \ldots,$$

$$U = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{(z-x)\left[\theta'(x) + \frac{1}{2}(z-x)\,\theta''(x) + \ldots\right]},$$

mas (n.° 28—2.°)

$$U = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{\frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta'(x) + \frac{1}{2}(z-x)\,\theta''(x) + \ldots}}{z-x} = f(x);$$

logo

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z) - \theta(x)}.$$

Se attendermos agora a que, por ser $|\theta(x)| < |\theta(z)|$, tem logar o desenvolvimento em série

$$\frac{1}{\theta(z) - \theta(x)} = \frac{1}{\theta(z)} + \frac{\theta(x)}{\theta^2(z)} + \ldots + \frac{\theta^n(x)}{\theta^{n+1}(z)} + \ldots,$$

vê-se que é

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\left[\int_S \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)} + \theta(x)\int_S \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta^2(z)} + \ldots + \theta^n(x)\int_S \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta^{n+1}(z)} + \ldots\right].$$

Para determinar os integraes que entram n'este desenvolvimento, notemos que a integração por partes dá, quando $n > 0$,

$$\int \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta^{n+1}(z)} = -\frac{f(z)}{n\theta^n(z)} + \frac{1}{n}\int \frac{f'(z)\,dz}{\theta^n(z)};$$

e portanto temos

$$\int_S \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta^{n+1}(z)} = \frac{1}{n}\int_S \frac{f'(z)\,dz}{\theta^n(z)} = \frac{1}{n}\int_S \frac{f'(z)\,dz}{(z-a)^n\,\Theta^n(z)}$$

$$= \frac{2i\pi}{1\,.\,2\,\ldots\,n}\,\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\frac{f'(a)}{\Theta^n(a)}\right].$$

Logo temos a formula

$$f(x) = f(a) + \theta(x)\,\frac{f'(a)}{\Theta(a)} + \ldots$$

$$+ \frac{\theta^n(x)}{1\,.\,2\,\ldots\,n}\,\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\frac{f'(a)}{\Theta^n(a)}\right] + \ldots,$$

devida a Burmann, que a appresentou em 1796 á Academia das Sciencias de Paris.

58. Pondo na formula precedente

$$\theta(x) = t,$$

t representando um numero dado tal que seja $|t| < |\theta(z)|$, quando z descreve o contôrno S, esta formula dá o desenvolvimento em série, ordenada segundo as potencias de t, da funcção $f(x)$ da unica raiz d'esta equação que, como vimos no principio do n.º 57, existe no interior de S.

59. A formula de Burmann contem como caso particular a formula de Taylor. Pondo, com effeito, n'ella $\theta(z) = z - a$ e tomando para o contôrno S da integração uma circumferencia de raio R e centro a, limitando uma área na qual a funcção $f(x)$ seja synectica, temos, para todos os pontos x do interior da área e todos os pontos z da circumferencia que a limita, $|x-a| < |z-a|$; a formula de Burmann é pois applicavel e dá

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + \ldots$$

60. Pondo na formula de Burmann

$$\theta(z) = \frac{z-a}{\varphi(z)},$$

$\varphi(z)$ representando uma funcção synectica na área A e tal que seja, para todos os pontos z do contôrno d'esta área,

$$\left|\frac{x-a}{\varphi(x)}\right| < \left|\frac{z-a}{\varphi(z)}\right|,$$

vem a *formula de Lagrange*

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{\varphi(x)} f'(a)\varphi(a) + \frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\varphi^2(x)}\frac{d[f'(a)\varphi^2(a)]}{da}$$

$$+ \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}\frac{(x-a)^n}{\varphi^n(x)}\frac{d^{n-1}[f'(a)\varphi^n(a)]}{da^{n-1}} + \ldots$$

Pondo n'esta formula

$$\frac{x-a}{\varphi(x)} = t,$$

vem a seguinte:

$$f(x) = f(a) + tf'(a)\varphi(a) + \frac{1}{2}t^2\frac{d[f'(a)\varphi^2(a)]}{da}$$

$$+ \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}t^n\frac{d^{n-1}[f'(a)\varphi^n(a)]}{da^{n-1}} + \ldots,$$

que determina a funcção $f(x)$ da raiz x da equação

$$x = a + t\varphi(x),$$

que existe no interior do contôrno S, quando para todos os pontos z do contôrno tem logar a desigualdade

$$|t| < \left| \frac{z-a}{\varphi(z)} \right|.$$

No que precede tirou-se a formula de Lagrange da formula de Burmann. Esta ultima formula não é todavia mais geral do que a primeira. Pondo, com effeito,

$$\varphi(z) = \frac{z-a}{\theta(z)}$$

na formula de Lagrange vem immediatamente a de Burmann.

A formula de Lagrange foi pela primeira vez publicada pelo grande geometra n'uma memoria appresentada á Academia das Sciencias de Berlin (*Nouvelle méthode pour résoudre les équations litérales par le moyen des séries*, 1770; *Oeuvres*, t. III) a qual foi pouco tempo depois seguida d'outra sobre a applicação d'esta formula á resolução de algumas equações que apparecem em Mecanica celeste. A demonstração de Lagrange é fundada em considerações algebricas e nos desenvolvimentos em série d'algumas funcções elementares. Laplace na sua *Mecanica celeste* obtem esta formula de uma maneira mais simples deduzindo-a directamente da série de Maclaurin. Nenhum d'esto geometras deu todavia as condições para que a série seja applicavel. O primeiro geometra que estudou a questão da convergencia da série de Lagrange foi Cauchy, que applicou a esta série os mesmos methodos que tão bom resultado lhe tinham dado quando applicados á série de Taylor. Os resultados a que chegou dão logar a deffieuldades; abriram todavia a Rouché o caminho para a resolução definitiva d'esta questão (*Journal de l'Ecole Polytechnique de Paris*, cad. 39), o qual coincide, á parte as notações, com o que foi empregado no n.º 57 para deduzir a série de Burmann.

61. Para terminar o que temos a dizer sobre a formula de Burmann, vamos fazer applicação d'esta formula ao desenvolvimento das funcções em série ordenada segundo as potencias de sen x.

Temos de pôr n'este caso $\varphi(x) = \operatorname{sen} x$ e de procurar um contôrno tal que seja, para todos os valores de x representados por pontos do interior d'este contôrno,

$$|\operatorname{sen} x| < |\operatorname{sen} z|,$$

z representando um ponto qualquer do contôrno.

Para resolver esta questão, vamos estudar as curvas definidas pela equação

$$|\operatorname{sen} z| = c,$$

c representando uma constante, ou, pondo $z = x_1 + iy_1$,

$$(1) \qquad +\sqrt{\operatorname{sen}^2 x_1 \cos^2 iy_1 - \cos^2 x_1 \operatorname{sen}^2 iy_1} = c,$$

onde $\operatorname{sen}^2 iy_1$ e $\cos^2 iy_1$ são quantidades reaes dadas pelas formulas

$$\operatorname{sen}^2 iy_1 = -\left(\frac{e^{-y_1} - e^{y_1}}{2}\right)^2, \quad \cos^2 iy_1 = \left(\frac{e^{-y_1} + e^{y_1}}{2}\right)^2.$$

Como o valôr do primeiro membro d'esta equação não muda quando se muda x_1 em $x_1 + \pi$, vê-se que y_1 é uma funcção periodica de x, cujo periodo é igual a π; basta portanto considerar o ramo da curva que corresponde aos valores de x_1 comprehendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$.

Vê-se tambem que a curva é symetrica relativamente aos eixos das coordenadas; podemos portanto considerar sómente, para a discussão da curva, os valôres de x_1 e y_1 que são positivos.

Posto isto, supponhamos primeiramente $c \gtrless 1$.

Vê-se immediatamente, pondo na equação $x_1 = 0$, que o ramo considerado da curva corta o eixo das ordenadas no ponto cuja ordenada é igual a $\log(c + \sqrt{c^2 + 1})$. Vê-se tambem, pondo $y_1 = 0$, que a curva corta o eixo das abscissas no ponto cuja abscissa é igual a arc sen c.

Resolvendo a equação (1) relativamente a $\cos^2 i y_1$, vem

$$\cos^2 i y_1 = c^2 + \cos^2 x_1,$$

e portanto

$$\frac{e^{-y_1} + e^{y_1}}{2} = \pm \sqrt{c^2 + \cos^2 x_1},$$

ou

$$e^{2y_1} \mp \sqrt{c^2 + \cos^2 x_1}\, e^{y_1} + 1 = 0.$$

Esta equação dá

$$e^{y_1} = \pm \sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} \pm \sqrt{c^2 - \cos^2 x_1},$$

e portanto

$$y_1 = \log \left[\pm \sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} \pm \sqrt{c^2 - \cos^2 x_1} \right].$$

Esta igualdade faz vêr, em primeiro logar, que y_1 é imaginario quando $x_1 >$ arc sen c. Para cada valôr de x_1, inferior a arc sen c, a mesma igualdade dá para y_1 dous valôres reaes e dous valôres imaginarios. Dos dous valores reaes deve-se approveitar aquelle que, para $x_1 = 0$, dá

$$y_1 = \log (c + \sqrt{c^2 + 1}),$$

isto é o valôr

$$(2) \qquad y_1 = \log \left[\sqrt{c^2 + \cos^2 x_1} + \sqrt{c^2 - \operatorname{sen}^2 x_1} \right];$$

o outro corresponde á equação

$$- \sqrt{\operatorname{sen}^2 x_1 \cos^2 i y_1 - \cos^2 x_1 \operatorname{sen}^2 i y_1} = c.$$

Obtêm-se por meio da igualdade (2) todos os pontos da curva compre-

hendidos entre os pontos cujas abscissas são 0 e arc sen c, e vê-se que y_1 cresce desde 0 até $\log(c+\sqrt{c^2+1})$ quando x_1 diminue desde arc sen c até 0.

A equação

$$y'_1 = \frac{\operatorname{sen} 2x_1}{i \operatorname{sen} 2iy_1}$$

dá as tangentes á curva e faz vêr que as tangentes nas extremidades dos eixos são perpendiculares a estes eixos. Para tirar esta conclusão deve-se observar que a quantidade $i \operatorname{sen} 2iy_1$ é real.

A eliminação de y_1 entre a equação

$$\cos 2iy_1 = 2c^2 + \cos 2x_1,$$

que resulta de (1), e a equação

$$\operatorname{sen}^2 2x_1 \cos 2iy_1 = \cos 2x_1 \operatorname{sen}^2 2iy_1$$

que resulta de formar y_1'' e pôr depois $y_1'' = 0$, leva á equação

$$\cos 2x_1 = -c^2 \pm \sqrt{c^4 - 1},$$

a qual mostra que não ha pontos de inflexão quando $c \gtrless 1$.

Vê-se pois que cada uma das curvas representadas pela equação $|\operatorname{sen} z| = c$ é composta, quando $c \gtrless 1$, de um numero infinito de ovaes iguaes cujos centros são as raizes da equação $\operatorname{sen} x = 0$ e cujos eixos são iguaes a 2 arc sen c e 2 $\log(c+\sqrt{c^2+1})$, o primeiro eixo coincidindo com o eixo das abscissas e o segundo sendo parallelo ao eixo das ordenadas.

Vê-se facilmente que, se fôr $c > 1$, as curvas representadas pela equação $|\operatorname{sen} z| = c$ não cortam o eixo das abscissas e não podem porisso dar logar á contôrnos fechados contendo no interior os pontos que correspondem ás raizes da equação $\operatorname{sen} x = 0$.

Quando c varia desde 1 até 0, as ovaes representadas pela equação $|\operatorname{sen} z| = c$ variam de tal módo que aquella que corresponde a menor va-

lôr de e é interior áquella que corresponde a maior valôr de e e diminuem continuamente até se reduzirem a um ponto. Estas curvas resolvem a questão proposta, isto é, cada uma d'ellas limita uma área tal que

$$|\operatorname{sen} x| < |\operatorname{sen} z|,$$

z representando um ponto qualquer do contôrno e x um ponto qualquer do interior.

Seja pois $f(z)$ uma funcção synectica na área A limitada por uma oval cuja equação seja $|\operatorname{sen} z| = e$. A formula de Burmann é neste caso applicavel e temos

$$f(x) = f(0) + A_1 \operatorname{sen} x + A_2 \operatorname{sen}^2 x + \ldots$$

onde $A_1, A_2, \ldots$ são quantidades constantes, que podem ser determinadas por meio dos integraes

$$A_n \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f(z) \cos z dz}{\operatorname{sen}^{n+1} z} = \frac{1}{2ni\pi} \int_S \frac{f'(z)\, dz}{\operatorname{sen}^n z},$$

ou por meio da expressão

$$A_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[\frac{x^n f'(x)}{\operatorname{sen}^n x} \right],$$

onde, depois de effectuadas as derivações indicadas, se deve substituir x por aquella a das raizes da equação $\operatorname{sen} x = 0$ que corresponde ao centro da oval considerada.

62. Consideremos, por exemplo, a funcção

$$f(x) = \operatorname{sen} kx,$$

k representando um numero qualquer, real ou imaginario, e ponha-se $a = 0$.

Teremos

$$A_n = \frac{k}{2ni\pi} \int_S \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^n z}, \qquad (n > 0).$$

Mas

$$\int \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^n z} = \int \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^{n+2} z} - \int \frac{\cos kz \cos^2 z dz}{\operatorname{sen}^{n+2} z}$$

e, integrando por partes o ultimo termo do segundo membro,

$$\int \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^n z} = \int \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^{n+2} z} + \frac{\cos kz \cos z}{(n+1)\operatorname{sen}^{n+1} z}$$

$$+ \frac{k}{n+1} \int \frac{\operatorname{sen} kz \cos z dz}{\operatorname{sen}^{n+1} z} + \frac{1}{n+1} \int \frac{\cos kz \operatorname{sen} z dz}{\operatorname{sen}^{n+1} z},$$

ou, integrando por partes o penultimo termo do segundo membro,

$$\int \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^n z} = \int \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^{n+2} z} + \frac{\cos kz \cos z}{(n+1)\operatorname{sen}^{n+1} z}$$

$$- \frac{k}{n+1} \cdot \frac{\operatorname{sen} kz}{n \operatorname{sen}^n z} + \frac{k^2}{n(n+1)} \int \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^n z} + \frac{1}{n+1} \int \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^n z}.$$

Portanto

$$\int_S \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^n z} = \int_S \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^{n+2} z} + \frac{k^2}{n(n+1)} \int_S \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^n z}$$

$$+ \frac{1}{n+1} \int_S \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^n z},$$

ou

$$\int_S \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^{n+2} z} = \frac{n^2 - k^2}{n(n+1)} \int_S \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^n z}.$$

Temos pois a igualdade

$$(a) \qquad A_{n+2} = \frac{n^2 - k^2}{(n+1)(n+2)} A_n.$$

A analyse que precede não tem logar quando é $n = 0$. Vamos porém mostrar que a formula a que chegámos ainda tem logar n'este caso.

Por ser

$$A_0 = \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{\operatorname{sen} kz \cos z dz}{\operatorname{sen} z},$$

e

$$\int \frac{\operatorname{sen} kz \cos z dz}{\operatorname{sen} z} = -\frac{\cos kz \cos z}{k \operatorname{sen} z} - \frac{1}{k} \int \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^2 z},$$

temos, com effeito,

$$A_0 = -\frac{1}{2ki\pi} \int_S \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen}^2 z} = -\frac{2}{k^2} A_2,$$

e portanto

$$A_2 = -\frac{k^2}{2} A_0.$$

Posto isto, da igualdade (*a*) tira-se, quando n é par, notando que A_0 é igual a zero,

$$A_n = 0.$$

Por ser (n.º 28 — 2.º)

$$A_1 = \frac{k}{2i\pi} \int_S \frac{\cos kz dz}{\operatorname{sen} z} = \frac{k}{2i\pi} \int_S \frac{\cos kz dz}{z\left(1 - \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \ldots\right)} = k,$$

a mesma igualdade dá, quando n é impar,

$$A_{n+2} = \frac{(n^2 - k^2)\left((n-2)^2 - k^2\right) \ldots (1 - k^2)}{1 \cdot 2 \ldots (n+2)} k.$$

Logo, se x representar um ponto da oval cujo centro é a origem das coordenadas e cuja equação é $|\operatorname{sen} z| = 1$, temos

$$\operatorname{sen} kx = k\left[\operatorname{sen} x - \frac{k^2-1}{1.2.3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{(k^2-1)(k^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\operatorname{sen}^5 x + \ldots\right].$$

Do mesmo modo se acha, no caso da funcção $\cos kx$,

$$\cos kx = 1 - \frac{k^2}{2}\operatorname{sen}^2 x + \frac{k^2(k^2-2^2)}{1.2.3.4}\operatorname{sen}^4 x - \ldots$$

Estas formulas são devidas a *Euler*.

63. Os coefficientes do desenvolvimento da funcção $f(x)$ em série ordenada segundo as potencias de uma funcção $\theta(x)$ podem ser expressos ainda por meio de determinantes, como fez vêr *Wronski*.

Seja

$$f(x) = f(a) + A_1\theta(x) + A_2\theta^2(x) + \ldots + A_n\theta^n(x) + \ldots$$

e $\theta(x) = (x-a)\,\Theta(x)$. Teremos, derivando esta série, pondo depois $x = a$ e notando que as derivadas de ordem n das potencias de $\theta(x)$, superiores a n, são nullas quando $x = a$,

$$f'(a) = A_1\frac{d\theta(a)}{da},$$

$$f''(a) = A_1\frac{d^2\theta(a)}{da^2} + A_2\frac{d^2\theta^2(a)}{da^2},$$

$$f'''(a) = A_1\frac{d^3\theta(a)}{da^3} + A_2\frac{d^3\theta^2(a)}{da^3} + A_3\frac{d^3\theta^3(a)}{da^3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^n(a) = A_1\frac{d^n\theta(a)}{da^n} + A_2\frac{d^n\theta^2(a)}{da^n} + \ldots + A_n\frac{d^n\theta^n(a)}{da^n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Estas formulas dão $A_1, A_2, A_3, \ldots$ expressos por meio de determinantes que nos dispensamos de escrever.

Wronski considerou mesmo a questão do desenvolvimento das funcções em série da fórma

$$a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + a_3 \varphi_3(x) + \ldots$$

$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ sendo funcções dadas. O resultado a que, a esta respeito, chegou foi modernamente demonstrado por Ch. Lagrange, astronomo do Observatorio de Bruxellas, de um módo muito simples (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1884).

Sejam $f(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ funcções synceticas na área limitada por um contôrno S e x e a dous pontos do interior d'esta área. O determinante

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ f(a) & \varphi_1(a) & \ldots & \varphi_n(a) \\ f'(a) & \varphi_1'(a) & \ldots & \varphi_n'(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f^{n-1}(a) & \varphi_1^{n-1}(a) & \ldots & \varphi_n^{n-1}(a) \end{vmatrix}$$

é nullo, assim como as suas $n-1$ primeiras derivadas relativamente a x, quando $x = a$; logo, applicando á funcção $F(x)$ a formula de Taylor e o theorema de Cauchy (n.° 30), temos

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{(x-a)^n F(z)\, dz}{(z-a)^n (z-x)}.$$

Esta igualdade dá, desenvolvendo o determinante $F(x)$ segundo os termos da primeira linha,

$$A_0 f(x) = A_1 \varphi_1(x) - A_2 \varphi_2(x) + \ldots \pm A_n \varphi_n(x) + \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{(x-a)^n F(z)\, dz}{(z-a)^n (z-x)},$$

onde $A_0, A_1, A_2, \ldots$ representam os determinantes menores que se obtêem

supprimindo no anterior a primeira linha e successivamente a 1.ª, 2.ª, 3.ª, ... columna.

N'esta formula, que conduz á série a que Wronski deu o nôme de *lei suprema*, entram os determinantes $A_0, A_1, A_2, \ldots$ e $F(z)$, que são compostos de um numero de columnas que tende para o infinito quando n tende para o infinito; porisso é de uma applicação tão defficil que (fóra do caso já considerado de $\theta_1(x), \theta_2(x), \ldots$ representarem potencias de uma mesma funcção) não tem servido nem parece poder servir para desenvolver funcção alguma em série.

64. Terminaremos o que temos a dizer sobre o desenvolvimento das funcções em série appresentando uma formula que dá o desenvolvimento de $f(x)$ em série ordenada segundo as potencias inteiras, positivas e negativas, de uma funcção $\theta(x)$, quando $f(x)$ é synectica sómente n'um annel limitado por duas curvas S e s e x representa um ponto do interior d'este annel.

Seja S o contôrno exterior e s o contôrno interior do annel, seja a um numero complexo representado por um ponto do interior da área limitada por s e supponhamos que, para todos os pontos do contôrno S, é

$$|\theta(x)| < |\theta(z)|$$

e que, para todos os pontos do contôrno s, é

$$|\theta(x)| > |\theta(z)|.$$

A equação $\theta(z) - \theta(x) = 0$ tem uma só raiz $z = x$ no interior do contôrno S e o theorema de Cauchy demonstrado no n.º 28 dá

$$\int_S \frac{f(z)\theta'(z)\,dz}{\theta(z) - \theta(x)} = \int_s \frac{f(z)\theta'(z)\,dz}{\theta(z) - \theta(x)} + \int_c \frac{f(z)\theta'(z)\,dz}{\theta(z) - \theta(x)},$$

c representando uma circumferencia descripta do ponto x como centro com um raio sufficientemente pequeno para ficar no interior do annel.

Temos porém (n.° 28—2.°)

$$\frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{f(z)\varphi'(z)dz}{\varphi(z)-\varphi(x)}=\frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{f(z)\varphi'(z)\,dz}{(z-x)[\varphi'(x)+\frac{1}{2}(z-x)\varphi''(x)+\ldots]}=f(x).$$

Logo

$$f(x)=\frac{1}{2i\pi}\left[\int_S \frac{f(z)\varphi'(z)\,dz}{\varphi(z)-\varphi(x)}-\int_s \frac{f(z)\varphi'(z)\,dz}{\varphi(z)-\varphi(x)}\right].$$

O primeiro integral já foi considerado no n.° 57 e dá

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\varphi'(z)dz}{\varphi(z)-\varphi(x)}=\frac{1}{2i\pi}\left[\int_S \frac{f(z)\varphi'(z)dz}{\varphi(z)}+\varphi(x)\int_S \frac{f(z)\varphi'(z)dz}{\varphi^2(z)}\right.$$
$$\left.+\ldots+\varphi^n(x)\int_S \frac{f(z)\varphi'(z)\,dz}{\varphi^{n+1}(z)}+\ldots\right].$$

Para desenvolver o segundo integral em série, notemos que, por ser, em todos os pontos z da curva s, o módulo de $\varphi(z)$ menor que o módulo de $\varphi(x)$, temos

$$\frac{1}{\varphi(z)-\varphi(x)}=-\frac{1}{\varphi(x)}\left[1+\frac{\varphi(z)}{\varphi(x)}+\ldots+\frac{\varphi^n(z)}{\varphi^n(x)}+\ldots\right];$$

e portanto

$$\int_s \frac{f(z)\varphi'(z)\,dz}{\varphi(z)-\varphi(x)}=-\frac{1}{\varphi(x)}\int_s f(z)\varphi'(z)\,dz$$
$$-\frac{1}{\varphi^2(x)}\int_s f(z)\varphi(z)\varphi'(z)\,dz-\ldots-\frac{1}{\varphi^n(x)}\int_s f(z)\varphi^{n-1}(z)\varphi'(z)\,dz-\ldots$$

Logo temos a formula

$$f(x)=A_0+A_1\varphi(x)+A_2\varphi^2(x)+\ldots+A_n\varphi^n(x)+\ldots$$
$$+\frac{B_1}{\varphi(x)}+\frac{B_2}{\varphi^2(x)}+\ldots+\frac{B_n}{\varphi^n(x)}+\ldots,$$

onde

$$A_n = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,\varphi'(z)\,dz}{\varphi^{n+1}(z)},$$

$$B_n = -\frac{1}{2i\pi}\int_s f(z)\,\varphi^{n-1}(z)\,\varphi'(z)\,dz.$$

Esta formula contem a formula de Burmann, que corresponde ao caso de a funcção $f(x)$ ser synectica na área limitadà por s. N'este caso, com effeito, o integral que entra na expressão de B_n é (n.º 28) nullo.

Pondo

$$\varphi(z) = z - a$$

e tomando para contôrnos S e s duas circumferencias de raios R e r e de centro a, é $|x-a| < |x-a|$ para todos os pontos x da circumferencia interior, e $|x-a| > |x-a|$ para todos os pontos x da circumferencia exterior. A formula anterior é pois applicavel e dá a seguinte:

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + \ldots + A_n(x-a)^n + \ldots$$
$$+ \frac{B_1}{x-a} + \frac{B_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{B_n}{(x-a)^n} + \ldots,$$

onde

$$A_n = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}},$$

$$B_n = -\frac{1}{2i\pi}\int_s f(z)\,(z-a)^{n-1}\,dz,$$

isto é, a *formula de Laurent* já considerada nos n.ºs 32 e 55.

65. Os integraes que entram na formula geral, que vimos de apresentar, podem ser expressos por meio dos coefficientes do desenvolvimento obtido pela formula de Laurent, no caso de a funcção $f(x)$ admittir, na área limitada pelo contôrno interior s, sómente um numero limitado de pontos singulares em que deixe de ser synectica.

Sejam, com effeito, $b_1, b_2, \ldots, b_m, \ldots, b_k$ estes pontos, $c_1, c_2, \ldots, c_k, c$ circumfereneias cujos centros sejam os pontos representados por $b_1, b_2, \ldots, b_k, a$ e cujos raios sejam assaz pequenos para que a área limitada por cada uma d'ellas não contenha outro d'estes pontos, alêm do centro.

Temos, em virtude do theorema de Cauchy demonstrado no n.º 28 - 1.º,

$$A_n = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,\varphi'(z)\,dz}{\varphi^{n+1}(z)} = \frac{1}{2ni\pi}\int_S \frac{f'(z)\,dz}{\varphi^n(z)}$$

$$= \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{2ni\pi}\int_{c_m} \frac{f'(z)\,dz}{\varphi^n(z)} + \frac{1}{2ni\pi}\int_c \frac{f'(z)\,dz}{\varphi^n(z)}.$$

Mas, representando por α um qualquer dos pontos $b_1, b_2, \ldots, b_k$, tem logar, na vesinhança do ponto α, o desenvolvimento (em virtude do theorema de Laurent)

$$(A)\qquad \left\{\begin{array}{l} f(x) = M_0 + M_1(x-\alpha) + M_2(x-\alpha)^2 + \ldots \\ \quad + \dfrac{N_1}{x-\alpha} + \dfrac{N_2}{(x-\alpha)^2} + \dfrac{N_3}{(x-\alpha)^3} + \ldots, \end{array}\right.$$

e portanto o desenvolvimento

$$f'(x) = M_1 + 2M_2(x-\alpha) + \ldots$$

$$- \frac{N_1}{(x-\alpha)^2} - \frac{2N_2}{(x-\alpha)^3} - \frac{3N_3}{(x-\alpha)^4} - \ldots$$

Substituindo esta série em logar de $f'(x)$ na expressão de A_n, vê-se que as k primeiras parcellas d'esta expressão podem ser decompostas n'uma somma de parcellas d'esta fórma

$$\frac{1}{2ni\pi}\int_{c_m} \frac{dz}{\varphi^n(z)\,(z-b_m)^2},$$

que são nullas (n.º 28) quando $\beta \gtrless 0$, e que são iguaes a (n.º 29)

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots (\beta - 1)\, n} \left[\frac{d^{\beta-1}}{dx^{\beta-1}} \left(\frac{1}{\psi^n (x)} \right) \right]_{x=b_m}$$

quando $\beta > 0$.

Por ser $\psi (x) = (x - a)\, \Theta (x)$, vê-se que a ultima das parcellas que entra na expressão de A_n é igual a (n.º 29)

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)\, n} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{f' (x)}{\Theta^n (x)} \right) \right]_{x=a},$$

quando a não coincide com um dos pontos $b_1, b_2, \ldots, b_k$, e que se decompõe, procedendo como se fez a respeito das anteriores, em parcellas da fórma

$$\frac{1}{2 n i \pi} \int_c \frac{dz}{\Theta^n (z)\, (z - a)^{n+\beta}},$$

cujo valôr é

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots (n + \beta - 1)\, n} \left[\frac{d^{n+\beta-1}}{dx^{n+\beta-1}} \left(\frac{1}{\Theta^n (x)} \right) \right]_{x=a},$$

quando a coincide com algum dos pontos $b_1, b_2, \ldots, b_k$.

Para os coefficientes B_n temos do mesmo módo

$$B_n = -\frac{1}{2 i \pi} \int_s f (z)\, \psi^{n-1} (z)\, \psi' (z)\, dz = \frac{1}{2 n i \pi} \int_s f' (z)\, \psi^n (z)\, dz$$

$$= \frac{1}{2 n i \pi} \sum_{m=1}^{k} \int_{c_m} f' (z)\, \psi^n (z)\, dz;$$

e os integraes que entram no segundo membro reduzem-se, como no caso anterior, a integraes da fórma

$$\frac{1}{2 n i \pi} \int_{c_m} \frac{\psi^n (z)\, dz}{(z - b_m)^{\beta}},$$

os quaes são nullos quando $\beta \gtreqless 0$ e iguaes a

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots (\beta - 1)\, n} \left[\frac{d^{\beta-1} \varphi^n (x)}{dx^{\beta-1}} \right]_{x=b_m},$$

quando $\beta > 0$.

Para determinar os coefficientes do desenvolvimento (A) (ou, o que é o mesmo, os integraes de que elles dependem segundo a formula de Laurent), quando o numero de parcellas fraccionarias que n'elle entram é infinito, não existe regra geral. No caso (o mais importante nas applicações) de o numero d'estas parcellas ser finito, isto é, no caso de ser

$$f(x) = M_0 + M_1 (x - a) + M_2 (x - a)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{N_1}{x - a} + \frac{N_2}{(x - a)^2} + \ldots + \frac{N_{\tau_1}}{(x - a)^{\tau_1}}$$

podem calcular-se estes coefficientes desenvolvendo em série

$$(x - \alpha)^{\tau_1} f(x)$$

por meio da formula de Taylor.

Reconhece-se que a funcção está n'estas circunstancias procurando se existe um numero τ_1 tal que o producto $(x - \alpha)^{\tau_1} f(x)$ tenda para um limite finito e determinado quando x tende para α.

Para fazer uma applicação d'estes principios, consideremos a funcção

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x - b)}.$$

Por ser

$$\lim_{x=b} \frac{x - b}{\operatorname{sen}(x - b)} = 1,$$

temos

$$f(x) = \frac{1}{x - b} + M_0 + M_1 (x - b) + \ldots,$$

e portanto

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-b)^2} + M_1 + 2M_2(x-b) + \dots$$

Podemos pois determinar A_n por meio da formula

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{f'(z)\,dz}{\vartheta^n(z)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{c} \frac{f'(z)\,dz}{\vartheta^n(z)},$$

que dá

$$A_n = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{dz}{\vartheta^n(z)(z-b)^2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{c} \frac{f'(z)\,dz}{\vartheta^n(z)}$$

$$= -\frac{1}{n}\left[\frac{d\vartheta^{-n}(x)}{dx}\right]_{x=b} + \frac{1}{1.2\dots n}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{f'(x)}{(-)^n(x)}\right)\right]_{x=a}$$

$$= \frac{\vartheta'(b)}{\vartheta^{n+1}(b)} - \frac{1}{1.2\dots n}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{\cos(x-b)}{\operatorname{sen}^2(x-b)(-)^n(x)}\right)\right]_{x=a}.$$

Para calcular B_n temos a formula

$$B_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} f'(z)\,\vartheta^n(z)\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{\vartheta^n(z)\,dz}{(z-b)^2},$$

que dá

$$B_n = -\frac{1}{n}\left(\frac{d\vartheta^n(x)}{dx}\right)_{x=b} = -\vartheta^{n-1}(b)\,\vartheta'(b).$$

Temos pois o desenvolvimento

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(x-b)} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\vartheta^{n-1}(b)\,\vartheta'(b)}{\vartheta^n(x)}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\vartheta'(b)}{\vartheta^{n+1}(b)} - \frac{1}{1.2\dots n}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{\cos(x-b)}{\operatorname{sen}^2(x-b)(-)^n(x)}\right)_{x=a}\right\}\vartheta^n(x).\right.$$

Nota ao n.º 61.

Depois de appresentar a memoria preecedente á Academia, occupámo-nos especialmente do desenvolvimento das funcções em série ordenada segundo as potencias de sen x em uma memoria publicada no *Jornal de Crelle* (Berlín, tomo 116, p. 14), onde appresentámos uma formula, para obter este desenvolvimento, de applicação mais facil do que a que resulta da formula de Burmann.

Seja

$$f(x) = A_0 + A_1 \operatorname{sen} x + \ldots + A_n \operatorname{sen}^n x + \ldots$$

Derivando esta igualdade e pondo depois $x = 0$, vem

$$\begin{aligned}
f(0) &= A_0, \\
f'(0) &= A_1, \\
f''(0) &= 2\,A_2, \\
f'''(0) &= -A_1 + 6\,A_3, \\
f^{\mathrm{IV}}(0) &= -8\,A_2 + 24\,A_4, \\
f^{\mathrm{V}}(0) &= A_1 - 60\,A_3 + 120\,A_5, \\
f^{\mathrm{VI}}(0) &= 32\,A_2 - 480\,A_4 + 720\,A_6, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

e portanto

$$A_0 = f(0),$$

$$A_1 = f'(0),$$

$$A_2 = \frac{1}{2} f''(0),$$

$$A_3 = \frac{1}{6} [f'''(0) + f'(0)],$$

$$A_4 = \frac{1}{24} [f^{IV}(0) + 4 f''(0)],$$

$$A_5 = \frac{1}{120} [f^{V}(0) + 10 f'''(0) + 9 f'(0)],$$

$$A_6 = \frac{1}{720} [f^{VI}(0) + 20 f^{IV}(0) + 64 f''(0)],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \ldots.$$

Em geral, podemos escrever

$$(1) \quad \begin{cases} A_{2n} = K[f^{(2n)}(0) + A f^{(2n-2)}(0) + \ldots + L f''(0)], \\ A_{2n+1} = K'[f^{(2n+1)}(0) + A' f^{(2n-1)}(0) + \ldots + L' f'(0)], \end{cases}$$

onde $K, K', A, A', \ldots, L, L'$ representam quantidades constantes, que vamos determinar.

Consideremos para isso a funcção $\operatorname{sen} kx$, cujo desenvolvimento segundo as potencias de $\operatorname{sen} x$ é dado pela formula

$$\operatorname{sen} kx = k \operatorname{sen} x - k \frac{k^2 - 1^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \operatorname{sen}^3 x + \ldots$$

$$+ (-1)^n k \frac{(k^2 - 1^2)(k^2 - 3^2) \ldots (k^n - (2n-1)^2)}{1 \cdot 2 \ldots (2n+1)} \operatorname{sen}^{2n+1} x + \ldots$$

Applicando a segunda das formulas (1) a esta funcção, vem

$$A_{2n+1} = (-1)^n K'[k^{2n+1} - A' k^{2n-1} + \ldots \pm L' k].$$

Comparando este resultado ao seguinte

$$A_{2n+1} = (-1)^n k \frac{(k^2 - 1^2)(k^2 - 2^2) \ldots (k^2 - (2n-1)^2)}{1 \cdot 2 \ldots (2n+1)}$$

e representando por $s^{(m)}_{2n+1}$ a somma das combinações dos numeros

$$1^2, 3^2, 5^2, \ldots, (2n-1)^2,$$

tomados m a m, temos pois

$$K' = \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots (2n+1)}, \quad A' = s^{(1)}_{2n+1}, \quad B' = s^{(2)}_{2n+1}, \ldots, \quad L' = s^{(n)}_{2n+1}.$$

Podemos pois escrever

$$(2) \quad A_{2n+1} = \frac{f^{(2n+1)}(0) + s^{(1)}_{2n+1} f^{(2n-1)}(0) + \ldots + s^{(n)}_{2n+1} f'(0)}{1 \cdot 2 \ldots (2n+1)}.$$

Esta formula pode ser escripta *symbolicamente* do modo seguinte:

$$(3) \quad A_{2n+1} = \frac{f(0)[f^2(0) + 1^2][f^2(0) + 3^2] \ldots [f^2(0) + (2n-1)^2]}{1 \cdot 2 \ldots (2n+1)},$$

onde se devem substituir, depois de effectuar as multiplicações indicadas, as potencias de $f(0)$ pelas derivadas de ordem igual ao expoente da potencia.

Para determinar os coefficientes K, A, B, ..., L da primeira das formulas (1), podemos considerar a funcção $\cos kx$, cujo desenvolvimento segundo as potencias de $\operatorname{sen} x$ é dado pela formula

$$\cos kx = 1 - \frac{k^2}{2} \operatorname{sen}^2 x + \frac{k^2 (k^2 - 2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \operatorname{sen}^4 x$$

$$- \ldots + (-1)^n \frac{k^2 (k^2 - 2^2) \ldots (k^2 - (2n-2)^2)}{1 \cdot 2 \ldots 2n} \operatorname{sen}^{2n} x + \ldots$$

Comparando o valor do coefficiente de $\operatorname{sen}^{2n} x$ n'esta formula com o valor dado pela formula

$$A_{2n} = (-1)^n K (k^{2n} - A k^{2(n-1)} + \ldots \pm L k^2)$$

e representando por $S^{(m)}_{2n}$ a somma das combinações dos numeros

$$2^2, 4^2, 6^2, \ldots, (2n-2)^2$$

tomados m a m, vem

$$K = \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots 2n}, \quad A = S^{(1)}_{2n}, \quad B = S^{(2)}_{2n}, \quad L = S^{(n-1)}_{2n}.$$

Podemos pois escrever a formula geral seguinte

$$(4) \qquad A_{2n} = \frac{f^{(2n)}(0) + S^{(1)}_{2n} f^{(2n-2)}(0) + \ldots + S^{(n-1)}_{2n} f''(0)}{1 \cdot 2 \ldots 2n},$$

ou *symbolicamente*

$$(5) \quad A_{2n} = \frac{f^2(0)\,[f^2(0) + 2^2]\,[f^2(0) + 4^2] \ldots [f^2(0) + (2n-2)^2]}{1 \cdot 2 \ldots 2n}.$$

Para fazer uma applicação das formulas precedentes vamos desenvolver a funcção

$$f(x) = x^{2m},$$

m representando um numero inteiro positivo.

Temos n'este caso

$$f^{(2n)}(0) + S^{(1)}_{2n} f^{(2n-2)}(0) + \ldots + S^{(n-1)}_{2n} f''(0) = 0,$$

quando é $n < m$, e portanto

$$A_0 = 0, A_2 = 0, \ldots, A_{2n-2} = 0.$$

Temos depois

$$A_{2m} = \frac{f^{2m}(0)}{1 \cdot 2 \ldots 2m} = 1,$$

$$A_{2m+2} = \frac{S^{(1)}_{2m+2} f^{2m}(0)}{1 \cdot 2 \ldots (2m+2)} = \frac{S^{(1)}_{2m+2}}{(2m+1)(2m+2)},$$

$$A_{2m+4} = \frac{S^{(2)}_{2m+4} f^{2m}(0)}{1 \cdot 2 \ldots (2m+4)} = \frac{S^{(2)}_{2m+4}}{(2m+1)(2m+2)(2m+3)(2m+4)}$$

. . . . . .

Como é

$$f^{(2n+1)}(0) + s^{(1)}_{2n+1} f^{(2n-1)}(0) + \ldots + s^{(n)}_{2n+1} f'(0) = 0,$$

temos tambem

$$A_1 = A_3 = A_5 = \ldots = 0.$$

Temos pois a formula

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^{2m} = \operatorname{sen}^{2m} x \left[1 + \dfrac{S^{(1)}_{2m+2}}{(2m+1)(2m+2)} \operatorname{sen}^2 x \right. \\ \left. + \dfrac{S^{(2)}_{2m+4}}{(2m+1)\ldots(2m+4)} \operatorname{sen}^4 x + \dfrac{S^{(3)}_{2m+6}}{(2m+1)\ldots(2m+6)} \operatorname{sen}^6 x + \ldots \right] \end{array} \right.$$

Do mesmo modo se acha a formula

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^{2m+1} = \operatorname{sen}^{2m+1} x \left[1 + \dfrac{s^{(1)}_{2m+3}}{(2m+2)(2m+3)} \operatorname{sen}^2 x \right. \\ \left. + \dfrac{s^{(2)}_{2m+5}}{(2m+2)\ldots(2m+5)} \operatorname{sen}^4 x + \dfrac{s^{(3)}_{2m+7}}{(2m+2)\ldots(2m+7)} \operatorname{sen}^6 x + \ldots \right] \end{array} \right.$$

N'um artigo publicado nas *Nouvelles Annales* (4.ª serie, t. II), apresentámos outra demonstração d'estas formulas.

A formula (6), pondo $m = 1$ e notando que é

$$S^{(1)}_{4} = 2^2, \quad S^{(2)}_{6} = 2^2 \cdot 4^2, \quad S^{(3)}_{8} = 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2, \ldots,$$

dá a formula conhecida

$$x^2 = \operatorname{sen}^2 x + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{sen}^4 x + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{3} \operatorname{sen}^6 x + \ldots$$

Do mesmo modo a formula (7), pondo $m = 0$ e notando que é

$$s^{(1)}_{3} = 1, \quad s^{(2)}_{5} = 3^2, \quad s^{(3)}_{7} = 3^2 \cdot 5^2, \quad s^{(5)}_{9} = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2, \ldots$$

dá a formula conhecida

$$x = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2 \cdot 3} \operatorname{sen}^3 x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \operatorname{sen}^5 x + \ldots$$

INDICE

Págs.

Introducção..... 1

Capitulo primeiro.—Estudo da série de Taylor no caso das funcções de variaveis reaes..... 5

Capitulo II.—Estudo da formula de Taylor no caso das funcções de variaveis complexas.—Methodo elementar..... 21

Capitulo III.—Continuacção do estudo da série de Taylor no caso das funcções de variaveis complexas.—Methodo de Cauchy..... 30

Capitulo IV.—Continuacção do estudo da série de Taylor no caso das funcções de variaveis complexas.—Methodo de Riemann..... 45

Capitulo V.—Continuacção do estudo das séries de Taylor e de Laurent no caso das funcções des variaveis complexas.—Methodo de Weierstrass e Mittag-Leffler..... 63

Capitulo VI.—Série de Burmann, série de Lagrange.—Generalização da série de Burmann..... 90

Nota ao n.º 61..... 111

3 2044 093 250 512